ПРАДМОВА

Прапанаваны вучэбна-метадычны дапаможнік напісаны для студэнтаў матэматычных факультэтаў педагагічных вышэйшых навучальных устаноў. Яго змест адпавядае тыпавой праграме матэматычнага аналізу, зацверджанай Вучэбна-метадычным аб’яднаннем ВНУ Рэспублікі Беларусь па педагагічнай адукацыі. Тэарэтычны і практычны матэрыял аформлены ў выглядзе модуля, што дазваляе сціслa і кампактна забяспечыць самастойную працу студэнтаў пры вывучэнні тэмы «Элементарныя функцыі».

Дапаможнік уключае вучэбны матэрыял (што вывучаць) і кіраўніцтва да вывучэння (як вывучаць), якія размешчаны паралельна (левая і правая часткі старонкі), што дае магчымасць арганізаваць самастойную працу студэнтаў. Наяўнасць спецыяльных элементаў: “Уваход у модуль”, “ВЭ-0. Уводзіны ў модуль”, “ВЭ-R. Абагульненне”, “ВЭ-К. Выніковы кантроль па модулі” забяспечывае завершанасць і этапнасць у навучанні, здзейсніць самакантроль па атрыманых ведах і ўменнях. Асноўны матэрыял падзелены на вучэбныя элементы (ВЭ-1–ВЭ-7), у кожным вучэбным элеменце асветлены асноўныя праблемы, вядучыя ідэі, вызначаны мэты. Усё гэта дапамагае студэнтам самастойна авалодаць матэрыялам. Наяўнасць самакантролю па кожным вучэбным элеменце дазваляе ацаніць свае веды.

У дапаможніку прыведзен канспект лекцый.

Модуль лічыцца засвоеным, калі студэнт пройдзе выніковы кантроль.

Аўтары спадзяюцца, што прапанаваны модуль дапаможаць студэнтам атрымаць глыбокія і трывалыя веды па тэме «Элементарныя функцыі».

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

БЛОК 1. *Уводзіны ў аналіз.*
Вучэбны модуль № 5: *“Элементарныя функцыі”.*
Уваход у модуль

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Для вывучэння дадзенага модуля неабходна выканаць наступныя заданні і адказаць на пытанні: 1. дайце азначэнне ступені з натуральным, цэлым паказнікам. 2. дайце азначэнне кораня з натуральным паказнікам, арыфметычнага кораня. 3. дайце азначэнне ступені з дробавым паказнікам. 4. дайце азначэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса сапраўднага ліку. 5. Якая функцыя называецца непарыўнай у пункце і на мностве? 6. Якія пункты адносяць да пунктаў разрыву і як высветліце іх характар? 7. дайце азначэнні гарызантальнай і вертыкальнай асімптот. 8. Умець даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць), перыядычнасць, манатоннасць. 9. Тэарэмы аб існаванні непарыўнай адваротнай функцыі. ☺Калі Вы справіліся з гэтымі заданнямі, то можна пераходзіць да вывучэння модуля. ☹ Калі заданні выклікалі ў Вас пэўныя цяжкасці, то неабходна пракансультавацца ў выкладчыка і паўтарыць матэрыял модуляў “Функцыя”, “Ліміт”, “Непарыўнасць”.	Для вывучэння дадзенага модуля патрэбны веды і ўменія з папярэдняга матэрыялу: 1. Ведаць паняцце “функцыя”, умець знаходзіць яе абсяг вызначэння. 2. Ведаць асноўныя класы функцый, умець даследуйце функцыі на цотнасць, перыядычнасць, манатоннасць, абмежаванасць. 3. Валодаць асноўнымі паняццямі аналізу “ліміт”, “непарыўнасць”. 4. Ведаць класіфікацыю пунктаў разрыву, умець знаходзіць пункты разрыву і высвятляць іх характар.

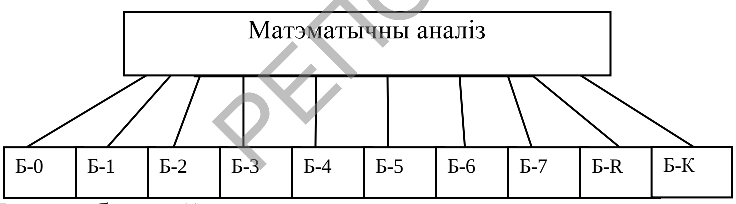
ВЭ-0. Уводзіны ў модуль.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Спачатку пазнаёмцеся з наступнай інфармацыяй аб курсе ўвогуле: Матэматычны аналіз − гэта галіна матэматыкі з характэрнымі аб’ектамі вывучэння: зменнай велічынёй; сваеасаблівым метадам даследавання: аналізам пры дапамозе бясконца малых ці пры дапамозе лімітавых пераходаў; вызначанай сістэмай асноўных паняццяў: функцыя, ліміт,	Азнаёмцеся з вучэбнай праграмай па тэме модуля Мноства сапраўдных лікаў і яго пашырэнне. Абмежаваныя і неабмежаваныя мноствы........................2 гадзіны Агульнае паняцце функцыі.Сапраўдная функцыя

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
вытворная, інтэграл, шэраг. Апарат дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэння, які складае аснову матэматычнага аналізу, з'яўляецца матэматычным фундаментам усяго сучаснага прыродазнаўства. Курс матэматычнага аналізу мае агульнаадукацыйнае значэнне. Мэтай курса з'яўляецца навуковае абгрунтаванне асноўных паняццяў, першае ўяўленне аб якіх даецца ў сярэдняй школе. Да такіх паняццяў адносяцца элементарныя функцыі. У адпаведнасці з гэтым вучэбная праграма "Матэматычны аналіз" складаецца з сямі ўзаемазвязаных, але адносна самастойных блокаў: "Уводзіны ў аналіз", "Дыферэнцыяльнае злічэнне для функцыі адной зменнай", "Інтэгральнае злічэнне для функцыі адной зменнай", "Шэрагі", "Асноўныя структуры матэматычнага аналізу", "Дыферэнцыяльнае злічэнне для функцыі некалькіх зменных", "Інтэгральнае злічэнне для функцыі некалькіх зменных". **Першы блок** прысвечаны фарміраванню асноўных паняццяў "множства", "сапраўдны лік", "функцыя", "паслядоўнасць", "ліміт паслядоўнасці", "ліміт функцыі", "непарыўнасць". Разглядаюцца спосабы пабудовы тэорыі сапраўдных лікаў, класіфікацыя функцый. Вывучаюцца асноўныя элементарныя функцыі і іх уласцівасці. У **другім блоку** фарміруюцца паняцці "вытворнай" і "дыферэнцыяла", "дыферэнцавальнасці сапраўднай функцыі ад адной зменнай". Раскрываецца геаметрычны і фізічны сэнс гэтых паняццяў, раскрываецца сувязь паміж дыферэнцавальнасцю і непарыўнасцю. Даказваюцца асноўныя тэарэмы дыферэнцыяльнага злічэння і іх прымяненні. **Трэці блок** прысвечаны інтэгральнаму злічэнню функцыі ад адной зменнай. Фарміруюцца паняцці "нявызначанага інтэграла", "вызначанага	сапраўднай зменнай....................... 4 гадзіны Лікавыя паслядоўнасці. Ліміт лікавай паслядоўнасці....9 гадзін Ліміт функцыі ў пункце.............................8 гадзін Непарыўнасць функцыі ў пункце і на множстве.......5 гадзін Элементарных функцыі.8 гадзін Азнаёмціся са спісам літаратуры па модулі, які змяшчаецца ў тыпавой вучэбнай праграме: 1. К.А. Бохан, И.А. Егоров, К.В. Лащенков. Курс математического анализа. Ч.1.,М., Посвещение, 1972. 2. Г.М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. Ч.1, М., Наука, 1967. 3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т.1, М., Высшая школа 1981. 4. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ. М., Наука, 1979. 5. И.М. Уваренков, М.З. Маллер. курс математического анализа. Т.1, М., Просвещение, 1966. 6. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, М., «Интеграл-пресс», 2001. 7. Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции: Учеб. Пособие. — Мн.: Выш.шк., 1991. 8. В.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1977. 9. Задачник по математическому анализу (под ред. Н.Я. Виленкина). М., Просвещение, 1977, ч.1. 10. В. Русак, Л. Шлома, В.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
інтэграла”, “няўласнага інтэграла”, разглядаюцца іх прыкладанні. **Чацверты блок** прысвечаны шэрагам лікавым і функцыянальным. Разглядаецца іх прымяненне для прыблізных вылічэнняў значэнняў функцыі. У **пятым блоку** абагульняюцца асноўныя паняцці нулявога блока на адвольную метрычную прастору. Даюцца азначэнні “метрыкі”, “метрычнай прасторы”, “адлюстравання метрычных прастор”, іх “ліміта” і “непарыўнасці”. Разглядаюцца метрычныя прасторы R^n, L_1, L_2, C[a;b], даюцца паняцці “кампакта”, “нарміраванай прасторы” і “гільбертавай прасторы”. У **шостым блоку** абагульняюцца асноўныя паняцці другога блока на функцыі *n* сапраўдных зменных. **Сёмы блок** абагульняе асноўныя паняцці трэцяга блока на функцыі *n* сапраўдных зменных. Кожны з блокаў падзяляецца на модулі. Модуль “Элементарныя функцыі” з’яўляецца пятым ў блоку “Уводзіны ў аналіз”. Глядзі графічную схему:  Назвы блокаў: Б-0. Уводзіны ў курс. Б-1. **Уводзіны ў аналіз.** Б-2. Дыферэнцыяльнае злічэнне для функцыі адной зменнай. Б-3. Інтэгральнае злічэнне для функцыі адной зменнай. Б-4. Шэрагі. Б-5. Асноўныя структуры матэматычнага аналізу. Б-6. Дыферэнцыяльнае злічэнне для функцыі	Ахраменко, А. Крачкоўскі. Курс вышэйшай матэматыкі. Мн., 1994. 11. Лабараторныя работы па матэматычным аналізе. Вучэбна-метадычны дапаможнік. Мн., 1999. 12. І.Г. Пятроўская, Э.У. Шалік. Ліміт паслядоўнасці. Ліміт функцыі. Вучэбна-метадычны дапаможнік. Мн., 2000. 13. Методические указания к лабораторным работам по «Дифференциальному и интегральному исчислению». Мн., 1990. 14. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Ч.1, М., Физматлит, 2003. Спіс літаратуры аб'ёмны. Для работы над модулем дастаткова 2–3 падручніка.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
некалькіх зменных. Б-7. Інтэгральнае злічэнне для функцыі некалькіх зменных. Б-R. Рэзюмэ (абагульненне). Б-К. Выніковы кантроль (дзяржаўны экзамен). **БЛОК 1.** *Уводзіны ў аналіз.* М-0. Уводзіны ў блок. М-1. Сапраўдныя лікі. М-2. Функцыі. М-3. Ліміт. М-4. Непарыўнасць. М-5. ***Элементарныя функцыі.*** М-R. Рэзюмэ (абагульненне). М-К. Выніковы кантроль па блоку (экзамен). ◆ ***Месца і значэнне модуля “Элементарныя функцыі” у сістэме курса.*** Элементарныя функцыі з’яўляюцца важнай часткай зместу матэматычнай адукацыі, як у сярэдніх, так і ў вышэйшых навучальных установах. З іх дапамогай пабудаваны і вывучаюцца матэматычныя мадэлі розных працэсаў рэчаіснасці. Гэтыя функцыі шырока выкарыстоўваюцца для ілюстрацыі розных матэматычных метадаў дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэнняў, тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў і інш. Вывучэнне элементарных функцый спрыяе павышэнню прафесійнага ўзроўню будучых настаўнікаў матэматыкі сярэдніх школ. ◆ ***Мэта вывучэння модуля.*** • Ведаць асноўныя элементарныя функцыі, іх уласцівасці; • Умець даказваць непарыўнасць гэтых функцый; • Умець даказваць усе ўласцівасці гэтых функцый; • Будаваць іх графікі; • Умець выяўляць элементарныя функцыі; • Умець даказваць непарыўнасць адвольнай	

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
элементарнай функцыі. ◆ ***Змястоўная структура модуля.*** Гл. графічную схему:  Схема ілюструе структуру модуля і яго змястоўныя блокі (вучэбныя элементы). Патрабуецца звярнуць увагу на назвы ВЭ і іх паслядоўнасць—у гэтым парадку іх мэтазгодна вывучаць. Назвы вучэбных элементаў ВЭ-0. Уводзіны. ВЭ-1. Ступеневая функцыя з натуральным паказнікам. ВЭ-2. Корань з натуральным паказнікам. ВЭ-3. Ступеневая функцыя з рацыянальным паказнікам ВЭ-4. Ступень дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам ВЭ-5. Паказнікавая функцыя. ВЭ-6. Лагарыфмічная функцыя ВЭ-7. Трыганаметрычныя і адваротныя трыганаметрычныя функцыі. ВЭ-R. Абагульненне. ВЭ-К. Выніковы кантроль па модулі. ◆ ***Аб змясце тэмы модуля.*** ***Ключавая праблема:*** вывучыць асноўныя элементарныя функцыі і іх уласцівасці. ***Вядучая ідэя:*** на падставе вывучэння і доказу ўласцівасцей асноўных элементарных функцый вылучаецца іх	Схема ілюструе склад модуля з ВЭ. Звярніце ўвагу на назвы ВЭ і паслядоўнасць іх пералічэння — гэта парадак, у адпаведнасці з якім Вы будзеце іх засвойваць.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
галоўная агульная ўласцівасць − непарыўнасць, якая дазваляй перанесці шэраг матэматычных паняццяў на разгладаемы клас функцый (дыферэнцаванне, інтэграванне). ***Асноўныя паняцці:*** функцыя, абсяг вызначэння, абсяг значэнняў, непарыўнасць, манатоннасць, цотнасць, перыядычнасць, адваротная функцыя, гарызантальная і вертыкальная асімптоты, графік функцыі, ступень з натуральным, рацыянальным, ірацыянальным і сапраўдным паказнікамі, лагарыфм па аснове a, сінус, косінус, тангенс, катангенс, арксінс, арккосінус, арктангенс, арккатангенс. *Колькасць гадзін на вывучэнне модуля:* Пры поўным самастойным вывучэнні—8 гадзін. Пры частковым самастойным вывучэнні—4 гадзіны.	

ВЭ-1. Ступеневая функцыя з натуральным паказнікам.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнне ступені сапраўднага ліку з натуральным паказнікам; азначэнне ступеневай функцыі з натуральным паказнікам; абсяг вызначэння і абсяг значэнняў ступеневай функцыі з цотным і няцотным паказнікамі ступені; уласцівасці ступеняў. ***умець:*** даказваць уласцівасці ступеневай функцыі з натуральным паказнікам; будаваць схематычна графік ступеневай функцыі з цотным і няцотным паказнікамі ступені. ***Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-1:*** 1. Азначэнні ступені і ступеневай функцыі з	Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля. Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях:

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

<table>
<tr><th>Вучэбны тэкст</th><th>Кіраўніцтва да вывучэння</th></tr>
<tr><td>натуральным паказнікам.
2. Уласцівасці ступеневай функцыі з натуральным паказнікам.
3. Графік ступеневай функцыі з натуральным паказнікам.

Парадак вывучэння першага пытання:
1.Усвядомце сутнасць пытання: Вам неабходна ведаць азначэнне ступені з натуральным паказнікам, якое дадзена ў школьным падручніку і адрозніваць яго ад азначэння ступеневай функцыі з натуральным паказнікам.
2. Пашырыць паняцце ступені з натуральным паказнікам на сімвалы $-\infty$ і $+\infty$.

Парадак вывучэння другога пытання:
1.Усвядомце сутнасць пытання: Вам неабходна ведаць уласцівасці ступеневай функцыі з натуральным паказнікам, каб потым выкарыстоўваць іх для доказу тэарэм і рашэння практычных задач.
2. Вы павінны ўмець даказваць уласцівасці ступеневай функцыі з натуральным паказнікам:
Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць
Цотнасць, перыядычнасць
Непарыўнасць
Асімптоты
Прамежкі манатоннасці
Пункты перасячэння з васямі каардынат
Парадак вывучэння трэцяга пытання:
Усвядомце сутнасць пытання: Вам неабходна ўмець будаваць графік ступеневай функцыі з натуральным паказнікам, з улікам даказаных уласцівасцей.</td><td>1–на ўзроўні знаёмства
2 і 3–на эўрыстычным узроўні

Выкарыстоўвайце для гэтага азначэнне пашырэння мноства сапраўдных лікаў і паняцце пашыранай лікавай прамой (гл. § 1 лекцый).

Доказ уласцівасцей прыведзены ў лекцыях §3, п. 1, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 6–7).
Разглядайце асобна выпадкі ступеневай функцыі з цотным і няцотным натуральнымі паказнікамі. Доказ прывядзіце з дапамогай азначэнняў адпаведных паняццяў (гл. азначэнні §1 лекцый).</td></tr>
</table>

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Самакантроль па ВЭ-1: 1. Дайце азначэнне ступені з натуральным паказнікам і ступеневай функцыі з натуральным паказнікам. 2. Якія значэнні можа прымаць функцыя $y=x^n$, ці звязаны яны са значэннем n? 3. Пры якіх значэннях n ступеневая функцыя цотная, няцотная, перыядычная? 4. Адзначце прамежкі манатоннасці ступеневай функцыі з натуральным паказнікам. 5. Дзе ступеневая функцыя з натуральным паказнікам непарыўная? Высветліце характар пунктаў разрыву. 6. Ці мае графік ступеневай функцыі з натуральным паказнікам асімптоты? 7. Пабудуйце графікі функцыйі $y=x^4$ і $y=x^7$. 8. Самастойна дайце азначэнне і дакажыце уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{-n}$, дзе n – натуральны лік. *У гэтым вучэбным элеменце Вы вывучалі ступеневую функцыю з натуральным паказнікам, даказалі яе ўласцівасці. Зараз Вы можаце пашырыць паняцце ступені з паказнікам* $\frac{1}{n}$*, дзе* n *– натуральны лік. Гэтае пытанне асвятляе ВЭ-2.*	Назавіце ўсе ўласцівасці ступеневай функцыі і на падставе іх пабудуйце яе графік (разгледзьце асобна выпадак ступеневай функцыі з цотным і няцотным натуральнымі паказнікамі). Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-1 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых мэт? Доказ уласцівасцей ступеневай функцыі $y=x^{-n}$, дзе n – натуральны лік праверце па вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 8). Разглядайце асобна выпадкі ступеневай функцыі з цотным і няцотным натуральнымі паказнікамі. Доказ прывядзіце з дапамогай азначэнняў адпаведных паняццяў (гл. § 1 лекцый).

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

ВЭ-2. Корань з натуральным паказнікам.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнне арыфметычнага кораня n-ай ступені з ліку $a\geq0$ і яго ўласцівасці; азначэнне ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$ і яе ўласцівасці; абсяг вызначэння і абсяг значэнняў ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$, калі n—цотны і няцотны. ***умець:***	Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
даказваць уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$; будаваць схематычна графік ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$.	
Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-2: 1. Азначэнні арыфметычнага кораня *n*-ай ступені з ліку $a\geq 0$ і ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$. 2. Уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$. 3. Графік ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$.	Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях: 1–на ўзроўні знаёмства 2 і 3–на эўрыстычным узроўні
Парадак вывучэння першага пытання: 1.*Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнне арыфметычнага кораня *n*-ай ступені з ліку $a\geq 0$ і ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$, якое дадзена ў школьным падручніку. 2. Ступеневая функцыя $y=x^{1/n}$, як адваротная ступеневай функцыі з натуральным паказнікам.	Выкарыстоўвайце для гэтага азначэнне адваротнай функцыі і тэарэму аб існаванні адваротнай функцыі (гл. § 1 лекцый).
Парадак вывучэння другога пытання: 1.*Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$, каб потым выкарыстоўваць іх для доказу тэарэм і рашэння практычных задач. 2. Вы павінны ўмець даказваць уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$: • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат	Доказ уласцівасцей прыведзены ў лекцыях §3, п. 2, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 11–15). Разглядайце асобна выпадкі, калі *n* – цотны і няцотны нтуральныя лікі. Доказ прывядзіце з дапамогай тэарымы аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі М-4 (гл. § 1 лекцый).
Парадак вывучэння трэцяга пытання: *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ўмець будаваць графік ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$, з улікам даказаных уласцівасцей.	Нагадайце ўсе ўласцівасці ступеневай функцыі і на падставе іх пабудуйце яе графік (разгледзіць асобна выпадак ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$ з

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Самакантроль па ВЭ-2: 1. Дайце азначэнні арыфметычнага кораня n-ай ступені з ліку $a \geq 0$ і ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$. 2. Якія значэнні можа прымаць функцыя $y=x^{1/n}$, ці звязаны яны са значэннем n? 3. Пры якіх значэннях n ступеневая функцыя $y=x^{1/n}$ цотная, няцотная, перыядычная? 4. Адзначце прамежкі манатоннасці ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$. 5. Дзе ступеневая функцыя $y=x^{1/n}$ непарыўная? Высветліце характар пунктаў разрыву. 6. Ці мае графік ступеневай функцыі $y=x^{1/n}$ асімптоты? 7. Пабудуйце графікі функцый $y=x^{1/4}$ і $y=x^{1/7}$. 8. Самастойна дайце азначэнне і дакажыце уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{-1/n}$, дзе n – натуральны лік. *У гэтым вучэбным элеменце Вы вывучылі ступеневую функцыю* $y=x^{1/n}$ ($y=x^{-1/n}$), *даказалі яе ўласцівасці. Зараз Вы можаце перайсці да вывучэння паняцце ступені з рацыянальным паказнікам. Гэтае пытанне асвятляе ВЭ-3.*	цотным і няцотным n). Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-2 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых? Доказ уласцівасцей ступеневай функцыі $y=x^{-1/n}$, дзе n – натуральны лік праверце па вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 14–15). Разглядайце асобна выпадкі ступеневай функцыі з цотным і няцотным натуральнымі паказнікамі. Доказ прывядзіце з дапамогай азначэнняў адпаведных паняццяў (гл. § 1 лекцый).

ВЭ-3. Ступеневая функцыя з рацыянальным паказнікам.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнне ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$ і яе ўласцівасці (m, $n \in$ N); азначэнне ступеневай функцыі $y=x^{-m/n}$ і яе ўласцівасці (m, $n \in$ N); уласцівасці ступені дадатнага ліку з рацыянальным паказнікам. ***умець:*** даказваць уласцівасці ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$ ($m \in$ Z, $n \in$ N); будаваць схематычна графік ступеневай	 Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N).	
Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-3: 1. Азначэнні ступеневай функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N). 2. Уласцівасці ступеневай функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N). 3. Графік ступеневай функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N). 4. Уласцівасці ступені дадатнага ліку з рацыянальным паказнікам.	Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях: 1–на ўзроўні знаёмства 2-4 –на эврыстычным узроўні
Парадак вывучэння першага пытання: 1.*Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнне ступені дадатнага ліку з рацыянальным паказнікам і ступеневай функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N). 2. Ступеневая функцыя y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N), як кампазіцыя ступеневай функцыі y=$x^{1/n}$ і ступеневай функцыі з цэлым паказнікам.	Выкарыстоўвайце для гэтага азначэнні ступеневай функцыі y=$x^{1/n}$ і ступеневай функцыі з цэлым паказнікам (ВЭ-1, ВЭ-2).
Парадак вывучэння другога пытання: 1.*Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць уласцівасці ступеневай функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N), каб потым выкарыстоўваць іх для доказу тэарэм і рашэння практычных задач. 2. Вы павінны ўмець даказваць уласцівасці ступеневай функцыі y=$x^{m/n}$ ($m\in$Z, $n\in$N): • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат	Доказ уласцівасцей прыведзены ў лекцыях §3, п. 3, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 14–15). Разглядайце асобна выпадкі, калі n – цотным і няцотным нтуральны лік. Доказ непарыўнасці прывядзіце з дапамогай тэарымы аб непарыўнасці складанай функцыі М-4 (гл. § 1 лекцый).
Парадак вывучэння трэцяга пытання: *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна	Нагадайце ўсе ўласцівасці

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
ўмець будаваць графік ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$ ($m\in Z$, $n\in N$), з улікам даказаных уласцівасцей.	ступеневай функцыі і на падставе іх пабудуйце яе графік (разгледзіць асобна выпадак ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$, дзе $m\in Z$, $n\in N$, з цотным і няцотным n).
Парадак вывучэння чацвёртага пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна умець даказваць уласцівасці ступені дадатнага ліку з рацыянальным паказнікам з дапамогай уласцівасцей арыфметычнага кораня n-ай ступені з ліку $a\geq 0$ і ступені з цэлым паказнікам. 2. Умець даказваць наступныя ўласцівасці: • $a^r > 0$ для любых рацыянальных r; • Для любых рацыянальных r_1, r_2: $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$, $a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2}$, $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}$, $(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1}=\frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$. • Калі $a>1$ і рацыянальны лік $r>0$, то $a^r>1$, калі $0<a<1$ і рацыянальны лік $r<0$, то $a^r>1$. • Калі $a>1$, $r_1>r_2$, то $a^{r_1}>a^{r_2}$, калі $0<a<1$ і $r_1>r_2$, то $a^{r_1}<a^{r_2}$. • Для адвольнага $a>0$ існуе ліміт $\lim\limits_{r\to 0}a^r=1$	Доказ уласцівасцей прыведзены ў школьных падручніках, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 15–18). Разглядайце асобна выпадкі, калі $a>1$ і $0<a<1$.
Самакантроль па ВЭ-3: 1. Дайце азначэнні ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$ ($m\in Z$, $n\in N$). 2. Якія значэнні можа прымаць ступеневая функцыя $y=x^{m/n}$ ($m\in Z$, $n\in N$), ці звязаны яны са значэннямі m і n? 3. Пры якіх значэннях m і n ступеневая функцыя $y=x^{m/n}$ цотная, няцотная, перыядычная? 4. Адзначце прамежкі манатоннасці ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$. 5. Дзе ступеневая функцыя $y=x^{m/n}$ непарыўная? Высветліце характар пунктаў разрыву. 6. Ці мае графік ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$	Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-3 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых мэт? Доказ уласцівасцей ступеневай функцыі $y=x^{m/n}$ ($m\in Z$, $n\in N$) праверце па вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 14–18). Разглядайце асобна выпадкі ступеневай функцыі з цотным і няцотным

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
асімптоты? 7. Пабудуйце графікі функцыйі $y=x^{3/4}$, $y=x^{5/4}$, $y=x^{-3/4}$, $y=x^{-2/7}$, $y=x^{2/7}$, $y=x^{-3/7}$, $y=x^{3/7}$, $y=x^{7/3}$, $y=x^{4/3}$. 8. Дакажыце усе ўласцівасці ступені дадатнага ліку з рацыянальным паказнікам. *У гэтым вучэбным элеменце Вы вывучалі ступеневую функцыю* $y=x^{m/n}$ ($m\in Z$, $n\in N$), *даказалі яе ўласцівасці. Зараз Вы можаце перайсці да вывучэння паняцце ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам. Гэтае пытанне асвятляе ВЭ-4.*	натуральнымі паказнікамі. Доказ прывядзіце з дапамогай азначэнняў адпаведных паняццяў (гл. § 1 лекцый).

ВЭ-4. Ступеневая функцыя з ірацыянальным паказнікам.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнні ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам і ступеневай функцыі з ірацыянальным паказнікам; ***умець:*** даказваць уласцівасці ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам.	Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля.
Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-4: 1. Азначэнне і існаванне ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам. 2. Уласцівасці ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам. 3. Ступеневая функцыя з ірацыянальным паказнікам і яе ўласцівасці.	Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях: 1– 3 – на эўрыстычным узроўні
Парадак вывучэння першага пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнне ступені дадатнага ліку a з ірацыянальным паказнікам α, як ліміту паслядоўнасці $\left(a^{r_n}\right)$, дзе (r_n) – адвольная	Доказ уласцівасцей прыведзены ў лекцыях §4, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 18–20).

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
паслядоўнасць рацыянальных лікаў, якая збягаецца да ліку α. 2. Умець даказваць тэарэму аб існавнні $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ і незалежнасці яго ад выбару паслядоўнасці (r_n). ***Парадак вывучэння другога пытання:*** 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць, што ўсе ўласцівасці азначэнне ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам даказываюцца з дапамогай азначэння ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам і адпаведных уласцівасцей ступені дадатнага ліку з рацыянальным паказнікам. 2. Умець даказваць наступныя ўласцівасці: • $a^{\alpha} > 0$ для любых ірацыянальных α; • Для любых ірацыянальных α_1, α_2: $a^{\alpha_1}\cdot a^{\alpha_2}=a^{\alpha_1+\alpha_2}$, $a^{\alpha_1}:a^{\alpha_2}=a^{\alpha_1-\alpha_2}$, $(a^{\alpha_1})^{\alpha_2}=a^{\alpha_1\cdot\alpha_2}$, $(a\cdot b)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$. • Калі $a>1$ і ірацыянальны лік $\alpha>0$, то $a^{\alpha}>1$, калі $0<a<1$ і ірацыянальны лік $\alpha<0$, то $a^{\alpha}>1$. • Калі $a>1$, $\alpha_1>\alpha_2$, то $a^{\alpha_1}>a^{\alpha_2}$, калі $0<a<1$ і $\alpha_1>\alpha_2$, то $a^{\alpha_1}<a^{\alpha_2}$.	Для прыкладу докажам наступную ўласцівасць: $a^{\alpha_1}\cdot a^{\alpha_2}=a^{\alpha_1+\alpha_2}$, дзе α_1, α_2 – адвольныя ірацыянальныя лікі . *Доказ.* Няхай (r_n) – адвольная паслядоўнасць рацыянальных лікаў, якая збягаецца да ліку α_1, (ρ_n) – адвольная паслядоўнасць рацыянальных лікаў, якая збягаецца да ліку α_2. Тады па азначэнню ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам маюць месца роўнасці $a^{\alpha_1}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, $a^{\alpha_2}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n}$. Знойдзем здабытак $a^{\alpha_1}\cdot a^{\alpha_2}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n}$ Па тэарэме аб ліміце здабытку збежных паслядоўнасцей $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\cdot a^{\rho_n}\right)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{r_n+\rho_n}\right)$, тут мы пад знакам ліміту ўскарысталіся ўласцівасцю ступені з рацыянальным паказнікам. Такім чынам $a^{\alpha_1}\cdot a^{\alpha_2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{r_n+\rho_n}\right)$. (1) Паколькі па ўмове $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\alpha_1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\alpha_2$, то па тэарэме аб

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Парадак вывучэння трэцяга пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнне ступеневай функцыі з ірацыянальным паказнікам і яе ўласцівасці. *2.* Умець даказваць уласцівасці • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат ***Самакантроль па ВЭ-4:*** 1. Дайце азначэнне ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам. 2. Дакажыце тэарэму аб існаванні ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам. 3. Дакажыце уласцівасці ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам. *Паняцце ступені зсапраўдным паказнікам непасрэдна звязана з паказнікавай функцыяй, вывучэнне якой прапануецца ў ВЭ-5.*	ліміце сумы збежных паслядоўнасцей паслядоўнасць рацыянальных лікаў (r_n+ ρ_n) таксама збягаецца і яе ліміт роўны $\alpha_1 + \alpha_2$. Знойдзем значэнне ступені $a^{\alpha_1+\alpha_2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{r_n+\rho_n}\right)$ (2) Параўнаем роўнасці (1) і (2), паколькі роўны правыя часткі, то будуць роўныя і левыя. Уласцівасць даказана. Доказ уласцівасцей прыведзены ў лекцыях, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 27–28). Абагульніце веды па ВЭ-1 – ВЭ-4 і дайце азначэнне ступені з сапраўдным паказнікам, пералічыце яе ўласцівасці. Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-4 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых мэт? Абагульніце паняцці *ВЭ-1 – ВЭ-4*. Падумайце, як азначыць ступеневую функцыю з сапраўдным паказнікам. Пералічыце уласцівасці ступеневай функцыі з сапраўдным паказнікам.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

ВЭ-5. Паказнікавая функцыя.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнне паказнікавай функцыі y=a^x і яе ўласцівасці; ***умець:*** даказваць уласцівасці паказнікавай функцыі y=a^x; будаваць схематычна графік паказнікавай функцыі y=a^x.	Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля.
Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-5: 1. Азначэнне і ўласцівасці паказнікавай функцыі y=a^x. 2. Графік паказнікавай функцыі y=a^x.	Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях: 1– часткава на ўзроўні знаёмства; 1 і 2–на эўрыстычным узроўні
Парадак вывучэння першага пытання: 1.*Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнне паказнікавай функцыі y=a^x і яе ўласцівасці. 2. Вы павінны ўмець даказваць уласцівасці паказнікавай функцыі y=a^x: • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат	Доказ уласцівасцей прыведзены ў лекцыях §4, або Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 20–23). Разглядайце асобна выпадкі 0<a<1, a>1.
Парадак вывучэння другога пытання: *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ўмець будаваць графік паказнікавай функцыі y=a^x , з улікам даказаных уласцівасцей.	Нагадайце ўсе ўласцівасці паказнікавай функцыі і на падставе іх пабудуйце яе графік (разгледзіць асобна выпадкі, калі 0<a<1 і калі a>1).

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Самакантроль па ВЭ-5: 1. Дайце азначэнні паказнікавай функцыі. 2. Якія значэнні можа прымаць паказнікавая функцыя, ці звязаны яны са значэннямі *a*? 3. Адзначце прамежкі манатоннасці паказнікавай функцыі. 4. Дакажыце непарыўнасць паказнікавай функцыі? Ці мае яна пункты разрыву. 5. Ці мае графік паказнікавай функцыі асімптоты? 6. Пабудуйце графік функцыі $y=a^x$. 7. Дакажыце усе ўласцівасці паказнікавай функцыі. *У гэтым вучэбным элеменце Вы вывучалі паказнікавую функцыю, даказалі яе ўласцівасці. Яшчэ раз абагульніце веды па ВЭ-1 – ВЭ-4, як звязаны ўласцівасці паказнікавай функцыі з уласцівасцямі функцый ВЭ-1 – ВЭ-4 .Зараз Вы можаце перайсці да вывучэння ВЭ-6, лагарыфмічнай функцыі, якая з'яўляецца адваротнай для паказнікавай.*	Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-5 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых мэт? Для доказу ўласцівасцей паказнікавай функцыі $y=a^x$ ускарыстацца ўласцівасцямі ступені з сапраўдным паказнікам. Доказ праверце па вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 20–23). Разглядайце асобна выпадкі, калі $0<a<1$ і калі $a>1$.

ВЭ-6. Лагарыфмічная функцыя.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнні лагарыфма дадатнага ліку па аснове *a*, лагарыфмічнай функцыі і яе ўласцівасці; ***умець:*** даказваць уласцівасці лагарыфмічнай функцыі; будаваць схематычна графік лагарыфмічнай функцыі па рознай аснове. ***Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-6:*** 1. Азначэнне лагарыфмічнай функцыі. 2. Уласцівасці лагарыфмічнай функцыі. 3. Графік лагарыфмічнай функцыі.	Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля. Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях: 1–на ўзроўні знаёмства

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кiраўнiцтва да вывучэння
Парадак вывучэння першага пытання: *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнне лагарыфмічнай функцыі, якое дадзена ў школьным падручніку і азначэнне лагарыфмічнай функцыі, як адваротная функцыі для паказнікавай.	2 і 3–на эўрыстычным узроўні Выкарыстоўвайце для гэтага азначэнне адваротнай функцыі і тэарэму аб існаванні адваротнай функцыі (гл. § 1 лекцый, тэарэма 1).
Парадак вывучэння другога пытання: 1.*Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць уласцівасці лагарыфмічнай функцыі, каб потым выкарыстоўваць іх для доказу тэарэм і рашэння практычных задач. 2. Вы павінны ўмець даказваць наступныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$: • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат	Для доказу ўласцівасцей функцыі $y = \log_a x$ яшчэ раз нагадайце ўласцівасці паказнікавай функцыі $y=a^x$ (гл.ВЭ-5). Разглядайце асобна выпадкі, калі 0<a<1 і калі a>1. Праверце доказ уласцівасцей (гл. Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции.— с. 25–27). Доказ прывядзіце з дапамогай тэарымы аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі М-4 (гл. § 1 лекцый).
Парадак вывучэння трэцяга пытання: *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ўмець будаваць графік лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$, з улікам даказаных уласцівасцей.	Нагадайце ўсе ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі і на падставе іх пабудуйце яе графік (разгледзіць асобна выпадакі, калі 0<a<1 і калі a>1).
Самакантроль па ВЭ-6: 1. Дайце азначэнні лагарыфма дадатнага ліку па аснове a і лагарыфмічнай функцыі. 2. Якія значэнні можа прымаць функцыя $y = \log_a x$, ці звязаны яны са значэннем a? 3. Даследуйце на цотнасць, перыядычнасць лагарыфмічную функцыю. 4. Адзначце прамежкі манатоннасці лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$. 5. Дзе лагарыфмічная функцыя	Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-6 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых мэт? Дакажыце уласцівасці лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$. Доказ праверце па

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
$y=\log_a x$ непарыўная? Высвятліце характар пунктаў разрыву. 6. Ці мае графік лагарыфмічнай функцыі асімптоты? 7. Пабудуйце графікі функцый $y=\log_2 x$ і $y=\log_{1/2} x$. *У гэтым вучэбным элеменце Вы вывучалі лагарыфмічную функцыю, даказалі яе ўласцівасці. Пяройдзем да вывучэння трыганаметрычных і адваротных трыганаметрычных функцый ВЭ-7.*	вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 25–27). Разглядайце асобна выпадкі, калі 0<a<1 і калі a>1.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

ВЭ-7. Трыганаметрычныя і адваротныя трыганаметрычныя функцыі.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння дадзенага вучэбнага элемента Вы павінны ***ведаць:*** азначэнні сінуса, косінуса, тангенса, катангенса, арксінуса, арккосінуса, арктангенса, арккатангенса сапраўднага ліку, функцыі сінус, косінус, тангенс, катангенс, арксінус, арккосінус, арктангенс, арккатангенс і іх ўласцівасці; ***умець:*** даказваць уласцівасці трыганаметрычных і адваротных трыганаметрычных функцый; будаваць іх графікі.	Мэтазгодна звярнуцца да ВЭ-0 і нагадаць ключавую праблему модуля.
Вузлавыя пытанні для вывучэння ВЭ-7: 1. Функцыі сінус і арксінус, іх уласцівасці. 2. Функцыі косінус і арккосінус, іх уласцівасці. 3. Функцыі тангенс і арктангенс, іх уласцівасці. 4. Функцыі катангенс і арккатангенс, іх уласцівасці.	Пытанні вывучаюцца на наступных узроўнях: 1–4–на алгарытмічным узроўні. Самастойна разгледзьце кожную функцыю па настуанай схеме: 1. Азначэнне. 2. Уласцівасці • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў,

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
	абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат 3. Графік
Парадак вывучэння першага пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнні сінуса і арксінуса ліку, а таксама функцый сінус (якое дадзена ў школьным падручніку) і арксінус (як адваротная функцыі для звужэння функцыі сінус). 2. Дакажыце уласцівасці функцыі сінус, а потым з дапамогай тэарэмы аб непарыўнасці адваротнай функцыі ўласцівасці функцыі арксінус. 3. Пабудуйце графікі функцый y=sin x і y= arcsin x.	Доказ уласцівасцей прывядзіце з дапамогай адзінкавай акружнасці, выкарыстоўвайце адпаведныя азначэнні і тэарэму аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі (гл. тэарэму 1 § 1 лекцый).
Парадак вывучэння другога пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнні косінуса і арккосінуса ліку, а таксама функцый косінус (якое дадзена ў школьным падручніку) і аркоксінус (як адваротная функцыі для звужэння функцыі косінус). 2. Дакажыце уласцівасці функцыі косінус, а потым з дапамогай тэарэмы аб непарыўнасці адваротнай функцыі ўласцівасці функцыі арккосінус. 3. Пабудуйце графікі функцый y=cos x і y= arccos x.	Доказ уласцівасцей прывядзіце з дапамогай адзінкавай акружнасці, выкарыстоўвайце адпаведныя азначэнні і тэарэму аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі (гл. § 1 лекцый).
Парадак вывучэння трэцяга пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнні тангенса і	Для доказу ўласцівасцей выкарыстоўвайце адпаведныя азначэнні і тэарэму аб існаванні і

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
арктангенса ліку, а таксама функцый тангенс (якое дадзена ў школьным падручніку) і арктангенс (як адваротная функцыі для звужэння функцыі тангенс). 2. Дакажыце уласцівасці функцыі тангенс, а потым з дапамогай тэарэмы аб непарыўнасці адваротнай функцыі ўласцівасці функцыі арктангенс. 3. Пабудуйце графікі функцый y=tg x і y= arctg x.	непарыўнасці адваротнай функцыі (гл. тэарэму 1 § 1 лекцый).
Парадак вывучэння чацвёртага пытання: 1. *Усвядомце сутнасць пытання:* Вам неабходна ведаць азначэнні катангенса і арккатангенса ліку, а таксама функцый катангенс (якое дадзена ў школьным падручніку) і арккатангенс (як адваротная функцыі для звужэння функцыі катангенс). 2. Дакажыце уласцівасці функцыі катангенс, а потым з дапамогай тэарэмы аб непарыўнасці адваротнай функцыі ўласцівасці функцыі арккатангенс. 3. Пабудуйце графікі функцый y=ctg x і y= arcctg x.	Для доказу ўласцівасцей выкарыстоўвайце адпаведныя азначэнні і тэарэму аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі (гл. тэарэму 1 § 1 лекцый).
Самакантроль па ВЭ-7: 1. Дайце азначэнні ўсіх трыганаметрычных і адваротных трыганаметрычных функцый. 2. Якія з гэтых функцый з'яўляюцца абмежаванымі? 3. Дакажыце перыядычнасць трыганаметрычных функцый. Ці з'яўляюцца перыядычнымі адваротныя ім функцыі? 4. Адзначце прамежкі манатоннасці для кожнай з функцый. 5. Дакажыце непарыўнасць трыганаметрычных і адваротных трыганаметрычных функцый, высветліце характар пунктаў разрыву. 6. Ці маюць графікі трыганаметрычных і адваротных трыганаметрычных функцый асімптоты? 7. Пабудуйце графікі функцый y= arcsin x,	Звярніцеся да вучэбных мэт ВЭ-7 і супастаўце іх з Вашымі ведамі і ўменнямі. Наколькі Вы дасягнулі гэтых мэт? Праверце доказ уласцівасцей трыганаметрычных функцый па падручніку "Алгебра 9–10" сярэдняй школы і па вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович. Элементарные функции (с. 28–36). Доказ уласцевасцей адваротных трыганаметрычных функцый прывядзіце з дапамогай тэарымы аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі М-4 (гл.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
y= arccos x, y= arctg x і y= arcctg x. *У гэтым вучэбным элеменце Вы вывучалі трыганаметрычныя і адваротныя трыганаметрычныя функцыі, даказалі іх ўласцівасці. На гэтым вывучэнн асноўных элементарных функцый скончына.Пагэтаму мэтазгодна паўтарыць асноўныя становішча модуля і перайсці да абагульнення ВЭ-R.*	тэарэму 1 § 1 лекцый).

ВЭ-R. Абагульненне.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Мэта ВЭ-R: абагульніце найбольш значныя веды па модулі. Для гэтага адкажыце на наступныя пытанні: 1. Дайце азначэнні ступеневай функцыі з натуральным паказнікам, караня з натуральным паказнікам, ступеневай функцыі з рацыянальным паказнікам, ступені дадатнага ліку з ірацыянальным паказнікам, ступені дадатнага ліку з сапраўдным паказнікам, паказнікавай функцыі, лагарыфмічнай функцыі, трыганаметрычных і адваротных трыганаметрычных функцый. 2. Пералічыце усе ўласцівасці гэтых функцый, умець іх даказваць. 3. Пабудуйце графікі пералічаных функцый. 4. Дайце азначэнне элементарнай функцыі. 5. Якія функцыі адносяцца да асноўных элементарных? 6. Сфармулюйце асноўную ўласцівасць элементарных функцый. Да ***асноўных элементарных функцый*** адносяцца ступеневая функцыя, паказнікавая, лагарыфмічная, трыганаметрычныя і адваротныя трыганаметрычныя. ***Элементарнымі функцыямі*** называюцца такія функцыі, якія атрыманы з асноўных элементарных функцый з дапамогаю канчатковага ліку арыфметычных аперацый	Для адказу на пытанні карыстайцеся вашымі ведамі, якія Вы атрымалі, калі вывучалі ўсе ВЭ модуля. Пры пералічэнні ўласцівасцей трымайцеся наступнай схемы: • Азначэнне • Абсяг вызначэння і абсяг значэнняў, абмежаванасць • Цотнасць, перыядычнасць • Непарыўнасць • Асімптоты • Прамежкі манатоннасці • Пункты перасячэння з васямі каардынат • Графік

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
(складання, множання і дзелі) і кампазіцый гэтых функцый (складаныя функцыі). У ВЭ-1–ВЭ-7 паказалі, што асноўныя элементарныя функцыі непарыўныя ў сваіх абсягах вызначэння. На падставе тэарэмы аб непарыўнасці алгебраічнай сумы, здабытку, дзелі непарыўных функцый і тэарэмы аб непарыўнасці складанай функцыі можна зрабіць ***ВЫСНОВА: кожная элементарная функцыя непарыўная ў сваім абсягу вызначэння.*** *Пасля паўтарэння асноўных тэзісаў матэрыялу Вам трэба перайсці да выніковага кантролю ВЭ-К.*	

ВЭ-К. Выніковы кантроль па модулі.

Вучэбны тэкст	Кіраўніцтва да вывучэння
Пасля вывучэння модуля Вы павінны: • ведаць асноўныя элементарныя функцыі і іх уласцівасці; • умець даказваць іх уласцівасці; • будаваць графікі асноўных элементарных функцый; • валодаць навыкамі вылучэння элементарных функцый сярод іншых функцый. ☺Калі Вы ўпэўнены ў сваіх ведах і навыках, то выкнайце выніковы тэст. 1. Запісаць формуламі асноўныя элементарныя функцыі. 2. Адзначце асноўныя элементарныя функцыі, абсяг вызначэння якіх ёсць: а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; г) $[-1;1]$. 3. Запісаць абмежаваныя асноўныя элементарныя функцыі. 4. Запісаць цотныя асноўныя элементарныя функцыі. 5. Запісаць няцотныя асноўныя элементарныя функцыі.	Паўтарыць вучэбны матэрыял па канспекту лекцый, або па вучэбным дапаможніку Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович.”Элементарные функции”, па дадзенаму модулю. Асаблівую ўвагу звярніце на ВЭ-R.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

<table>
<tr><th>Вучэбны тэкст</th><th>Кіраўніцтва да вывучэння</th></tr>
<tr><td>

6. Запісаць перыядычныя асноўныя элементарныя функцыі.

7. Якія з асноўных элементарных функцый узрастаюць на сваім абсягу вызначэння?

8. Якія з асноўных элементарных функцый убываюць на сваім абсягу вызначэння?

9. Ці з’яўляецца элементарнай функцыя:

а) y=sgn x;

б) y=|x|;

в) y=[x] ;

г) y={x}.

10. Ці верна выказванне: “Функцыя arcsin з’яўляецца адваротнай для функцыі sin”.

11. Ці з’яўляецца функцыяй адпаведнасць адваротная для y=cos x, калі $x\in[-\pi; 0]$? Калі да, то пералічыце ўласцівасці такой функцыі. Ці з’яўляецц яна элементарнай?

12. Устанавіць адпаведнасць паміж кожнай функцыяй і яе графікам:

A. $f(x)=2^x$

B. $f(x)=0{,}2^x$

C. $f(x)=log_3 x$

D. $f(x)=log_{3/5} x$

E. $f(x)=x^{-1/3}$

F. $f(x)=x^{3/8}$

G. $f(x)=x^3$

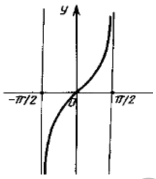
H. $f(x)=x^6$

I. $f(x)$=arcsin x

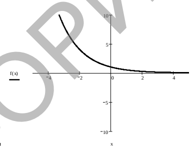
J. $f(x)$=arccos$x$

K. $f(x)$=arctg x

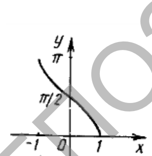
L. $f(x)$=arcctg$x$



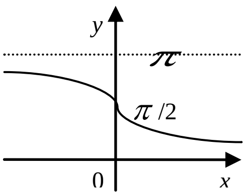
1



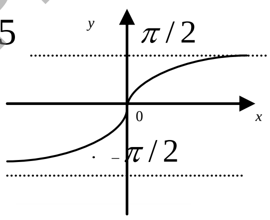
2



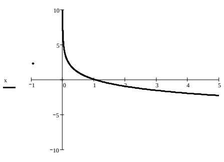
3



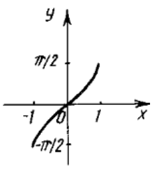
4



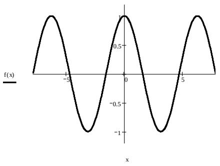
5



6



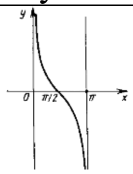
7

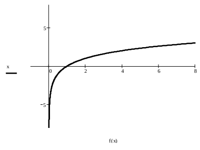
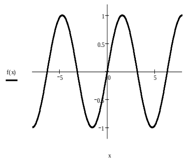
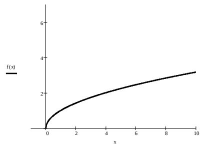
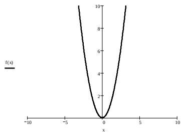
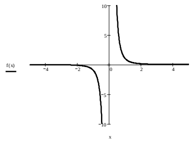
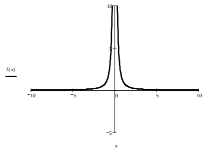
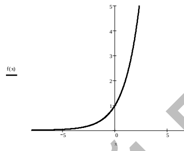
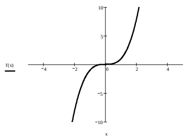


8

</td><td></td></tr>
</table>

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

<table>
<tr><th>Вучэбны тэкст</th><th>Кіраўніцтва да вывучэння</th></tr>
<tr><td>
M. $f(x)$=ctg $2x$
N. $f(x)$=cos $x/2$


9

10

11

12

13

14

15

16

17
13. Графікі якіх асноўных элементарных функцый
а) маюць гарызантальныя асімптоты;
б) маюць вертыкальныя асімптоты;
в) сіметрычныя адносна восі Ох;
г) сіметрычныя адносна восі Оу.
14. Сфармуляваць асноўную ўласцівасць элементарных функцый.
</td><td>
Адказы на тэст глядзіце на старонцы 53
Папрацуйце над памылкамі, якія былі зроблены пры адказе на пытанні тэста (калі іх менш за пяць). Якой адзнакай Вы ацанілі бы свае веды?
☹ Калі Вы не выканалі выніковы тэст (зрабілі пяць і болей памылак), то трэба зноў вярнуцца да вывучэння дадзенага модуля.
</td></tr>
</table>

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Канспект лекцый

§1. Асноўныя азначэнні і тэарэмы

Азначэнне 1. Адпаведнасць f паміж мноствамі X і Y, пры якой кожнаму элементу $x \in X$ ставіцца ў адпаведнасць не больш аднаго элемента $y \in Y$ называецца *функцыяй*; элемент x называецца *аргументам функцыі*, а адпаведны яму элемент y называецца *значэннем функцыі* ў пункце x і абазначаецца $y = f(x)$.

Азначэнне 2. Функцыя $y = f(x)$ называецца *цотнай* (*няцотнай*), калі задавальняе наступным умовам

1) $\forall x \in D(f)$ супрацьлеглы яму лік $-x \in D(f)$, г. зн. $D(f)$ – сіметрычнае адносна нуля мноства,

2) $\forall x \in D(f)$ выконваецца роўнасць $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Азначэнне 3. Функцыя $y = f(x)$ называецца *перыядычнай* з перыядам T>0, калі задавальняе наступным умовам

1) $\forall x \in D(f)$ $x + T \in D(f)$,

2) $\forall x \in D(f)$ выконваецца роўнасць $f(x+T) = f(x)$.

Азначэнне 4. Функцыя $y = f(x)$ называецца *ўзрастаючай (убываючай)* на мностве $X \subset D(f)$, калі $\forall x_1, x_2 \in X$ выконваецца роўнасць $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).

Функцыя $y = f(x)$ называецца *неўбываючай (неўзрастаючай)* на мностве $X \subset D(f)$, калі $\forall x_1, x_2 \in X$ выконваецца роўнасць $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$).

Неўбываючая, неўзрастаючая, узрастаючая, убываючая на мностве $X \subset D(f)$ функцыі называюцца *манатоннымі*.

Заўвага 1.Функцыя $y = f(x)$ называецца *манатоннай* на $D(f)$, калі яна неўбываючая, неўзрастаючая, узрастаючая, убываючая на $D(f)$.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Азначэнне 5. Функцыя $y = f(x)$ называецца *абмежаванай* на мностве $X \subset D(f)$, калі $\exists M > 0$ такі, што $\forall x \in X$ выконваецца няроўнасць $|f(x)| \leq M$, або $\exists m, M \in R$ такія, што $\forall x \in X$ выконваецца няроўнасць $m \leq f(x) \leq M$.

Заўвага 2. Функцыя $y = f(x)$ называецца *абмежаванай* на $D(f)$, калі $\exists M > 0$ такі, што $\forall x \in D(f)$ выконваецца няроўнасць $|f(x)| \leq M$, або $\exists m, M \in R$ такія, што $\forall x \in D(f)$ выконваецца няроўнасць $m \leq f(x) \leq M$.

Азначэнне 6. Функцыя $y = f(x)$ называецца *непарыўнай* у пункце $x_0 \in D(f)$, калі

1) x_0 – лімітавы пункт $D(f)$ і выконваецца роўнасць $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) x_0 – ізаляваны пункт $D(f)$

Для доказу непарыўнасці функцыі $y = f(x)$ у пункце $x_0 \in D(f)$ пры ўмове, што x_0 – лімітавы пункт $D(f)$, будзем карыстацца наступным.

Азначэнне 7. Функцыя $y = f(x)$ называецца *непарыўнай* у пункце x_0, які з'яўляецца лімітавым пунктам $D(f)$, калі бясконца малому прыросту аргумента адпавядае бясконца малы прырост функцыі, г.зн. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, дзе Δx – прырост аргумента, які выклікае прырост функцыі $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Азначэнне 8. Функцыя $y = f(x)$ называецца *непарыўнай* на $D(f)$, калі яна непарыўная ў кожным пункце $D(f)$.

Азначэнне 9. Функцыя $x = f^{-1}(y)$ называецца *адваротнай* для функцыі $y = f(x)$, калі кожнаму $y \in E(f)$ ставіцца ў адпаведнасць адзін і толькі адзін $x \in D(f)$. Функцыі f і f^{-1} называюцца *зваротнымі*.

Для зваротных функцый маюць месца тоеснасці

$$D(f^{-1}) \equiv E(f), \ E(f^{-1}) \equiv D(f),$$

$$f(f^{-1})(y)) \equiv y, \forall y \in D(f^{-1}) \quad f^{-1}(f(x)) \equiv x. \quad \forall x \in D(f)$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Тэарэма 1. Калі функцыя f непарыўная і ўзрастае (убывае) на мностве $X \subset D(f)$, то адваротная ёй функцыя f^{-1} таксама непарыўная і ўзрастае (убывае) на мностве $Y = \{y \mid y = f(x), \forall x \in X\}$.

Азначэнне 10. Калі пункт $x_0 \in D(f)$ і ў гэтым пункце функцыя не з'яўляецца непарыўнай, што гавораць, то функцыя *мае парыў у пункце* x_0. Пункт x_0 пры гэтым называецца *пунктам парыву* функцыі f.

Азначэнне 11. Пункт x_0 называецца *пунктам парыву першага роду*, калі ў гэтым пункце існуюць аднабаковыя ліміты функцыі, але хаця б адзін з іх не роўны значэнню функцыі ў пункце x_0. Пры гэтым, калі $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, то пункт x_0 называецца *пунктам парыву з канечным скачком.* Калі $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$, то пункт x_0 называецца *скасавальным пунктам парыву.*

Азначэнне 12. Пункт x_0 называецца *пунктам парыву другога роду*, калі хаця б адзін з аднабаковых лімітаў функыі ў пункце x_0 бясконцы, ці не існуе.

Грунтоўныя ліміты

Справядлівыя наступныя формулы:

Першы грунтоўны ліміт: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Другі грунтоўны ліміт: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

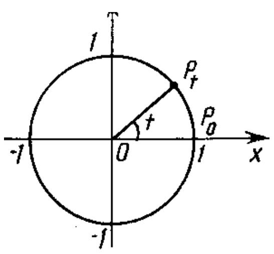
РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

§2. Трыганаметрычныя функцы.
Адваротныя трыганаметрычныя функцыі

1°. Трыганаметрычныя функцыі $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

У дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат разгледзім адзінкавую акружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат. Кожнаму сапраўднаму ліку t паставім у адпаведнасць пункт гэтай акружнасці P_t такі, што радыус $O P_t$ утварае з дадатным напрамкам восі Ox вугал, радыянная мера якога роўна t (калі t дадатны, то адкладваем вугал супраць гадзіннікавай стрэлкі, калі t адмоўны – па гадзіннікавай срэлке). Такім чынам пабудавалі функцыю, якая адлюстроўвае мноства сапраўдных лікаў R у мноства пунктаў адзінкавай акружнасці. Каардынаты пунктаў акружнасці $(x;y)$ задавальняюць роўнасці

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$



Азначэнне 1. Ардынату пункт P_t называюць *сінусам ліку* t, а абсцысу – *косінусам ліку* t.

Азначэнне 2. Функцыя, якая кожнаму сапраўднаму ліку $t \in R$ ставіць у адпаведнасць сінус ліку t называецца *функцыяй сінус*, а функцыя, якая кожнаму сапраўднаму ліку $t \in R$ ставіць у адпаведнасць косінус ліку t, называецца *функцыяй косінус*.Абазначаюць гэтыя функцыі адпаведна

$$y = \mathbf{sin}\, t \qquad\qquad y = \mathbf{cos}\, t$$

З улікам азначэння 1 і роўнасці (1) атрымліваем вядомую асноўную трыганаметрычую тоеснасць $\mathbf{sin^2}\, t + \mathbf{cos^2}\, t = 1$.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Далей, як звычайна, аргумент функцый сінус і косінус будзем абазначаць праз x, г.зн.

$$y = \mathbf{sin}\, x \qquad\qquad y = \mathbf{cos}\, x$$

Азначэнне 3. Функцыя, зададзеная формулай $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, называецца *тангенсам* і абазначаецца **tg**. Такім чынам, $y = tgx$.

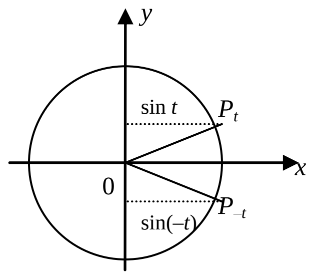
Азначэнне 4. Функцыя, зададзеная формулай $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, называецца *катангенсам* і абазначаецца **ctg**. Такім чынам, $y = ctgx$.

Уласцівасці функцый сінус і косінус

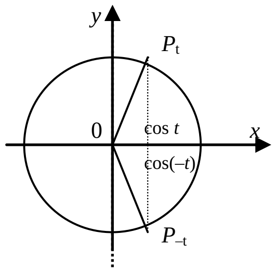
1. Абсяг вызначэння гэтых функцый ёсць мноства сапраўдных лікаў, а *абсяг значэнняў* – ёсць [–1; 1] (вынікае з азначэння 2), паколькі абсцысы і ардынаты ўсіх пунктаў адзінкавай акружнасці належаць [–1; 1] $\overset{\text{А.}5\,\S 1}{\Rightarrow}$ $y = \mathbf{sin}\, x$ і $y = \mathbf{cos}\, x$ – абмежаваныя

2. Цотнасць, перыядычнасць.

Выкарыстаем азаначэне 2 § 1: $D(\mathbf{sin})=D(\mathbf{cos})=$R– сіметрычныя адносна пачатку каардынат; $\sin(–t) = \sin t$ і $\cos(–t) = \cos t$ (гэта вынікае з азначэння 1 і малюнка) $\overset{\text{А.}2\,\S 1}{\Rightarrow}$ **cos** – цотная, а **sin** – няцотная функцыі. Паколькі пункты адзінкавай акружнасці P_t і $P_{t+2\pi k}$ (дзе $k \in Z$) супадаюць, то па азначэнні 3 § 1 функцыі сінус і косінус – перыядычныя. Асноўны (найменшы дадатны) перыяд — 2π .



РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



3. Непарыўнасць дакажам з дапамогай азначэннем 7 § 1. Заўважым, што кожны пункт $D(\sin)$ і $D(\cos)$ з'яўляецца лімітавым. Доказ правядзём для sin. Няхай x_0 – адвольны пункт з $D(\sin)$, зафіксуем яго і нададзім яму прырост Δx, які выклікае прырост функцыі

$$\Delta y = \sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0) = 2\sin\frac{x_0+\Delta x - x_0}{2}\cdot\cos\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Знойдзем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \otimes$

Дамножым і падзелім на Δx і выкарыстаем тэарэмамі аб ліміце здабытку, першым грунтоўным лімітам і тэарэмай аб здабытку бясконца малой Δx на абмежаваную cos

$$\otimes = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x\right) = 1\cdot 0 = 0 \Rightarrow \sin - \text{непарыўная.}$$

Аналагічна даказываецца непарыўнасць cos.

4. Асімптоты. З $D(\sin)$ і $D(\cos)$ $\Rightarrow$ вертыкальных асімптот няма. Даследуем на нахільныя: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$ (як здабытак бясконца малой функцыі $\frac{1}{x}$ на абмежаваную sin (cos) $\Rightarrow$ можа быць гарызантальная асімптота.

РЕПОЗІТОРИЙ БГПУ

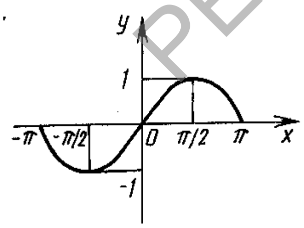
Вылічым $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ і $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$. З дапамогай азначэння ліміту паводле Гэйне даказваецца, што ліміт не існуе $\Rightarrow$ гарызантальных і нахільных асімптот няма.

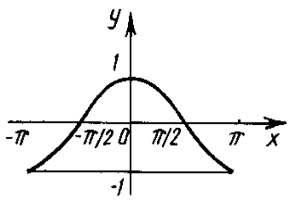
5. Прамежкі манатоннасці. Функцыя sin манатонна ўзрастае ад – 1 да 1 на прамежку $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ і манатонна ўбывае ад 1 да – 1 на прамежку $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$; максімальнае значэнне 1 дасягае ў пунктах $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, а мінімальнае значэнне –1 дасягае ў пунктах $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$.

Функцыя cos манатонна ўзрастае ад – 1 да 1 на прамежку $\left(-\pi+2\pi k; 2\pi k\right)$ і манатонна ўбывае ад 1 да – 1на $\left(2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$; максімальнае значэнне 1 дасягае ў пунктах $x=2\pi k$, а мінімальнае значэнне –1 дасягае ў пунктах $x=\pi+2\pi k$ (тут $k\in Z$).

6. Пункты перасячэння з васямі каардынат. Функцыя sin перасякае вось Оy у пункце (0;0), а функцыя cos — у пункце (0;1). Абсцысы пунктаў перасячэння sin з воссю Оx $x=2\pi k$, а функцыі cos – $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, дзе $k\in Z$.

7. Графік Функцыі **sin** – злева, **cos** – справа (з улікам перыяда, дастаткова пабудаваць графік на прамежку даўжыні 2π)





Уласцівасці функцый тангенс і катангенс

1. Абсяг вызначэння функцыі тангенс $D(f)=\left\{x\in R \middle| x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\right\}$. Абсяг вызначэння функцыі катангенс $D(f)=\left\{x\in R \middle| x\neq\pi n, n\in Z\right\}$. Абсягам значэнняў гэтых функцый з'яўляецца мноства R.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

2. Функцыі з’яўляюцца *няцотнымі* , што вынікае з іх азначэння і цотнасці і няцотнасці функцый косінус і сінус.

3. Тангенс і катангенс - *перыядычныя* функцыі з асноўным перыядам π.

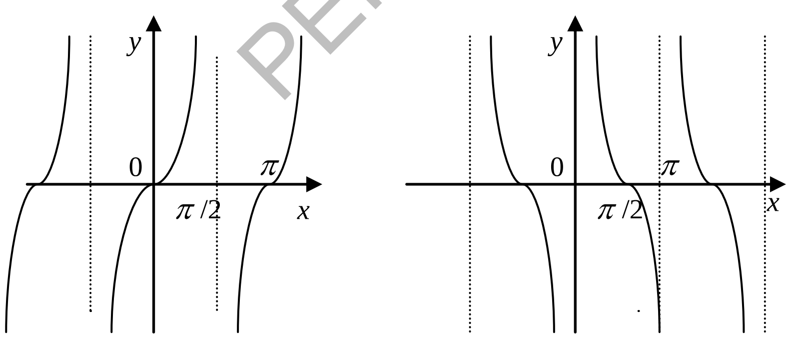
4. Для любога пункта $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$ тангенс і катангенс прымаюць *дадатныя значэнні*, а для любога $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right), n \in Z$ - *адмоўныя значэнні*.

5. Функцыі з’яўляюцца *непарыўнымі* як дзелі непарыўных функцый на сваім абсягу вызначэння.

6. Тангенс – функцыя *ўзрастаючая* на $D(f)$, а катангенс – *убываючая* функцыя на $D(f)$.

7. Паколькі $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) - 0} tgx = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) + 0} tgx = -\infty$, то прамыя $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ з’яўляюцца *вертыкальнымі асімптотамі* графіка функцыя тангенс. Паколькі $\lim\limits_{x \to (\pi + \pi n) - 0} ctgx = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi n + 0} ctgx = +\infty$, то прамыя $x = \pi n, n \in Z$ з’яўляюцца *вертыкальнымі асімптотамі* графікаў функцыя тангенс. Гарызантальных і нахільных асімптот графікі гэтых функцый не маюць.

8. Графік. Функцыі **tg** – злева, **ctg** – справа.

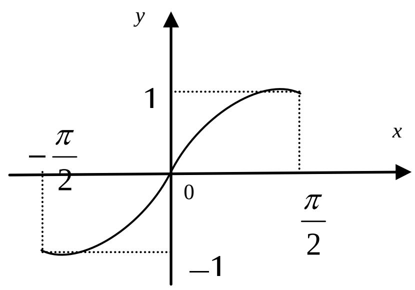


РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

2°. Адваротныя трыганаметрычныя функцыі y=arcsin x, y=arccos$x$,y = arctg$x$, y= arcctg$x$.

Функцыя $y = \sin x$ непарыўная на D(f) = **R**, E(f) = [–1,1], перыяд T = $2\pi n$, дзе $n\in$Z. Адваротная адпаведнасць функцыі **sin** не з'яўляецца функцыяй на адрэзку [-1,1], паколькі кожнаму значэнню y адпавядае мноства значэнняў x у сілу перыядычнасці функцыі **sin**.

Разгледзім звужэнне функцыі **sin** на адрэзку $[-\pi/2,\pi/2]$: $f(x) = \sin x$ $\forall x\in[-\pi/2,\pi/2]$. На адрэзку $[-\pi/2,\pi/2]$ функцыя $f(x) = \sin x$ узрастаючая, непарыўная і, адпаведна тэарэме 1 §1, для яе існуе адваротная функцыя f^{-1}, якая таксама з'яўляецца ўзрастальнай і непарыўнай на D(f^{-1}) =E(f) = [– 1,1].



Азначэнне 5. Функцыя f^{-1}, адваротная звужэнню функцыі **sin** на адрэзку $[-\pi/2,\pi/2]$ называецца, **арксінусам** і абазначаецца **arcsin**; прычым

D(arcsin) = E(sin) =[-1,1], E(arcsin) = D(sin) = $[-\pi/2,\pi/2]$.

Заўвага 1. Функцыя **arcsin** з'яўляецца няцотнай функцыяй.

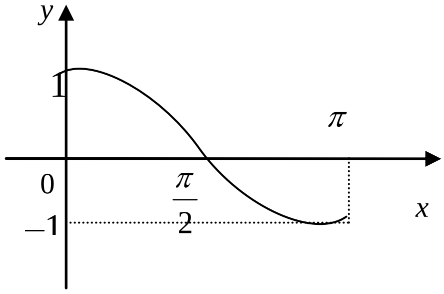
Функцыя $y = \cos x$ непарыўная на D(f) = **R**,

E(f) = [–1,1],перыяд T = 2πn, дзе n$\in$Z. Адваротная адпаведнасць функцыі **cos** не з'яўляецца функцыяй на адрэзку [-1,1], паколькі кожнаму значэнню y адпавядае мноства значэнняў x у сілу перыядычнасці функцыі **cos**.

Разгледзім звужэнне функцыі **cos** на адрэзку $[0,\pi]$: $f(x) = \cos x$ $\forall x\in[0,\pi]$. На адрэзку $[0,\pi]$ функцыя $f(x) = \cos x$ убывае, непарыўная і, адпаведна тэарэме 1 §1, для яе існуе адваротная функцыя f^{-1}, якая таксама ўбывае і непарыўнаz на

D(f^{-1}) =E(f) = [– 1,1].

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

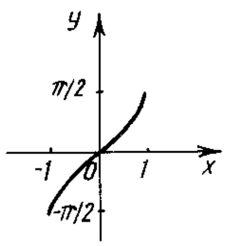


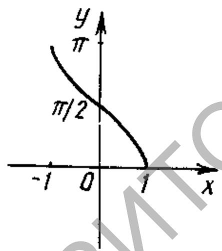
Азначэнне 6. Функцыя f^{-1}, адваротная звужэнню функцыі **cos** на адрэзку $[0,\pi]$ называецца **арккосінусам** і абазначаецца **arccos**; прычым

D(**arccos**) = E(**cos**) =[-1,1], E(**arccos**) = D(**cos**) = $[0,\pi]$.

Заўвага 2. Функцыя **arccos** не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай функцыяй.

Графікі функцый y = arcsin x (злева) і y = arccos x (справа) сіметрычныя, адпаведна графікам функцый $f(x)$ = sin$x$ $\forall x\in[-\pi/2,\pi/2]$ і $f(x)$ = cos x $\forall x\in[0,\pi]$ адносна прамой $y = x$.

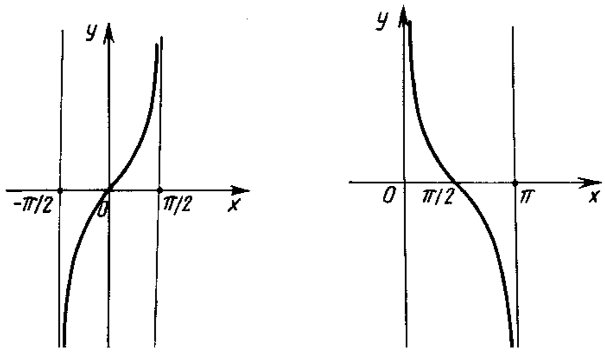




Аналагічна ўводзяцца функцыі **arctg** і **arcctg**. Адзначаем, што адпаведнасці адваротныя функцыям **tg** і **ctg** не з'яўляюцца функцыямі на прамежку $(-\infty;+\infty)$, паколькі кожнаму значэнню y адпавядае мноства значэнняў x у сілу перыядычнасці функцый **tg** і **ctg**.

Разгледзім звужэнне функцыі **tg** на інтэрвал $(-\pi/2,\pi/2)$ а **ctg** на інтэрвал $(0,\pi)$: $f(x)$=tg x $\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$ і $f(x)$=ctg x $\forall x\in(0,\pi)$. На інтэрвале $(-\pi/2,\pi/2)$ функцыя **tg** убывае, а функцыя **ctg** узрастае на інтэрвале $(0,\pi)$ і яны з'яўляюцца непарыўнымі на гэтых інтэрвалах. Тады, адпаведна тэарэме 1 §1, для іх існуюць адваротныя функцыі f^{-1}, з якіх адна ўбывае, а другая ўзрастае і непарыўныя на $D(f^{-1}) = E(f) = (-\infty;+\infty)$.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



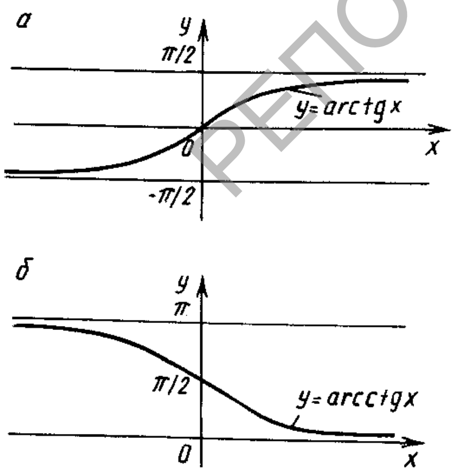
Азначэнне 7. Функцыя f^{-1}, адваротная звужэнню функцыі **tg** на інтэрвал $(-\pi/2,\pi/2)$ называецца **арктангенсам** і абазначаецца **arctg**; прычым
D(**arctg**) = E(**tg**) = $(-\infty;+\infty)$, E(**arctg**) = D(**tg**) = $(-\pi/2,\pi/2)$.

Заўвага 3. Функцыя **arctg** з'яўляецца няцотнай функцыяй.

Азначэнне 8. Функцыя f^{1}, адваротная звужэнню функцыі **ctg** на інтэрвал $(-\pi/2,\pi/2)$ называецца **арккатангенсам** і абазначаецца **arcctg**; прычым
D(**arcctg**) = E(**ctg**) = $(-\infty;+\infty)$, E(**arcctg**) = D(**ctg**) = $(0,\pi)$.

Заўвага 4. Функцыя **arcctg** не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай функцыяй.

Графікі функцый y = arctg x (а) і y = arcctg x (*б*) сіметрычныя, адпаведна, графікам функцый $f(x) = \mathrm{tg}x\ \forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$ і $f(x) = \mathrm{ctg}\,x\ \forall x\in(0,\pi)$ адносна прамой $y = x$.



РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

§3. Ступеневая функцыя з рацыянальным паказнікам ступені

Нагадаем, як азначаліся ступені сапраўднага ліку $a>0$ у сярэдняй школе, і іх уласцівасці

Азначэнне 1. Ступенню ліку $a>0$ з рацыянальным паказнікам r называецца лік, які абазначаецца a^r і вызначана наступным чынам:

1. Калі $r = n \in \mathrm{N}$, то $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (множнікі ***a*** узятыя n -разоў).
2. Калі $r = 1/n$ ($n \in \mathrm{N}$), то $a^{1/n}$ – арыфметычны корань n -ай ступені з ліку a.
3. Калі $r = 0$, то $a^r = 1$.
4. Калі $r = m/n$ ($m, n \in \mathrm{N}$ не маюць агульных дзельнікаў няроўных 0), то
$$(a^m)^{1/n} = a^{m/n}.$$
5. Калі $r = -m/n$ ($m, n \in \mathrm{N}$ не маюць агульных дзельнікаў няроўных 0), то
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

У гэтым параграфе будзем разглядаць функцыю, якая задаецца формулай $f(x)=x^r$, дзе $r \in Q$. Спынімся на прыватных выпадках.

1°. Ступеневая функцыя з натуральным паказнікам ступені.

Разгледзім функцыю, зададзеную формулай $y = x^n$, дзе $n \in N$, $x \in \mathrm{R}$. Такую функцыю будзем называць *ступеневай функцыяй з натуральным паказнікам ступені.*

Уласцівасці ступеневай функцыі з натуральным паказнікам ступені

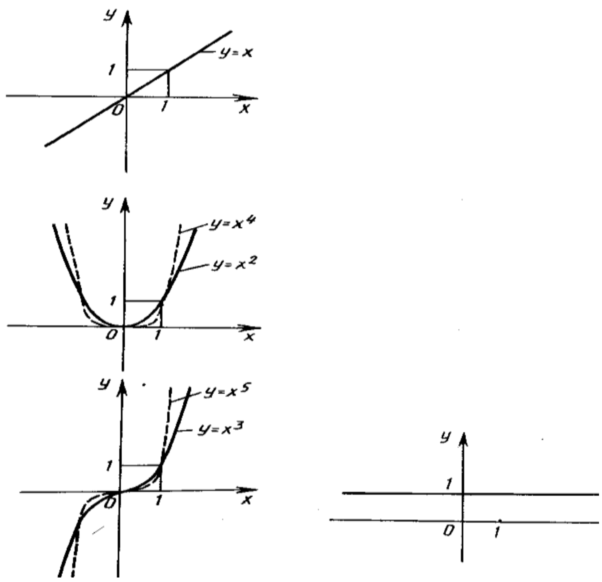
1. $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$.
2. Непарыўная, як здабытак непарыўных функцый.
3. Калі $n = 2k–1$, то f – узрастаючая функцыя на $\mathrm{D}(f)$, калі $n = 2k$, то f убывае на прамежку $(–\infty,0]$ і ўзрастае на прамежку $[0+\infty)$.

◄ З няроўнасці $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^n < x_2^n$ $\forall n \in \mathrm{N}$, калі $x_1 < x_2 \le 0$, то $x_1^n > x_2^n$, калі $n = 2k$, $x_1^n < x_2^n$, калі $n = 2k–1$. ►

4. Калі $n = 2k–1$, то фунцыя f неабмежаваная знізу і зверху $\Rightarrow \mathrm{E}(f) = \mathrm{R}$, пры

$n = 2k$ функцыя f абмежаваная знізу і неабмежаваная зверху адсюль вынікае, што $E(f) = [0+\infty)$.

5. Калі $n = 2k$-1, то f – няцотная функцыя. калі $n = 2k$, то f – цотная функцыя .



2°. Ступеневая функцыя з паказнікам ступені 1/n, дзе $n \in N$

Са школы вядома:

Азначэнне 2. Арыфметычным коранем *n*-ай ступені з неадмоўнага ліку *a* называецца такі неадмоўны лік, *n*-ая ступень якога роўная *a*.

Прыклады: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$.

<u>1. Няхай $n = 2k+1$.</u>

Разгледзім ступеневую функцыю $f(x) = x^n$, дзе <u>$n = 2k+1$</u>: D(f) = $(-\infty,+\infty)$, E(f) = $(-\infty,+\infty)$. Функцыя f узрастаючаяі і непарыўная на мностве R. Таму існуе функцыя f^{-1}, якая таксама ўзрастаючая і непарыўная на $E(f)$. Значэнні гэтай функцыі $\forall x \in R$ абазначым $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ і назавем *коранем n-ай ступені з ліку x або ступенню ліку x з паказнікам 1/n*. Функцыю f^{-1} называюць *ступеневай функцыяй з паказнікам ступені 1/n*. Графік функцыі f^{-1} сіметрычны графіку функцыі $f(x) = x^n$ адносна прамой $y=x$.

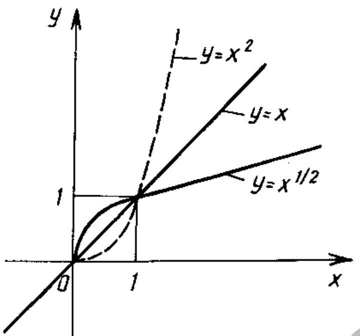
<u>2. Няхай $n = 2k$.</u>

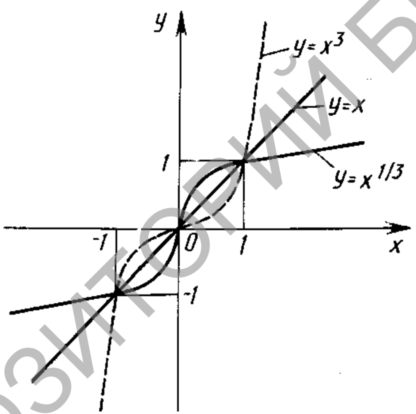
РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Разгледзім ступеневую функцыю $f(x) = x^n$, дзе <u>$n = 2k$:</u> D(f) = R, E(f) = [0+∞). Адваротная адпаведнасць не з'яўляецца функцыяй. Разгледзім звужэнне g функцый f на прамежку [0+∞). Такім чынам, D(g) =[0+∞) і E(g) = [0+∞), g – функцыя ўзрастаючая, непарыўная на D(g). Таму існуе функцыя g^{-1} таксама ўзрастаючая і непарыўная на D(g^{-1}) = E(g).

Значэнні гэтай функцыі $\forall x \in [0+\infty)$ абазначым

$g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ і назавём *коранем n-ай ступені з ліку x або ступенню ліку x з паказнікам 1/n*. Функцыю g^{-1} называюць *ступеневай функцыяй з паказнікам ступені 1/n*. Графік функцыі g^{-1} сіметрычны графіку функцыі $g(x) = x^n$ адносна прамой $y = x$.





Азначэнне 3. Неадмоўнае значэнне функцыі $\sqrt[n]{x}$ $\forall x \geq 0$ і $\forall n \in N$, незалежна ад цотнасці ліку n, называецца *арыфметычным коранем n-ай ступені з ліку **x*** $\Rightarrow$ $\forall x \geq 0$ і $\forall n \in N$, $\sqrt[n]{x} \geq 0$.

Вядома, што $f(f^{-1}(x)) = x$, таму $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ <u>$\forall x \geq 0$.</u>

3°. Ступеневая функцыя з адвольным рацыянальным паказнікам ступені

Разгледзім адвольны рацыянальны лік r. Магчымы тры выпадкі: $r = 0$, $r = m/n$, $r = -m/n$, калі $m,n \in N$ і не маюць агульных дзельнікаў няроўных 1.

Азначэнне 4. *Ступеневай функцыяй з паказнікам 0* называецца функцыя, зададзеная формулай $f(x) = x^0=1$.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Вядома, што гэта функцыя мае D(*f*) = R і непарыўная на D(*f*), як сталая.

Азначэнне 5. *Ступеневай функцыяй з паказнікам m/n* называецца функцыя, зададзеная формулай $f(x) = x^{m/n} \Rightarrow f(x) = (x^m)^{1/n}$.

Гэтую функцыю можна разглядаць, як кампазіцыю функцый

$f(x) = g \circ u$, дзе $u(x) = x^m$, $g(x) = x^{1/n}$.

У пунктах **1° і** 2° было даказана, што функцыі $g(x)$ і $u(x)$ непарыўныя на сваіх абсягах вызначэння, таму па тэарэме аб непарыўнасці складанай функцыі і функцыя *f* таксама непарыўная на сваім абсягу вызначэння. Менавіта абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца або прамежак $[0,+\infty)$ або прамежак $(-\infty,+\infty)$. Паколькі функцыі g і u узрастаючыя на прамежку $[0,+\infty)$, то і функцыя *f* узрастаючая на прамежку $[0,+\infty)$.

Азначэнне 6. *Ступеневай функцыяй з паказнікам* $-m/n$ называецца функцыя, якая задаецца формулай:

$$f(x) = x^{-\frac{m}{n}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Гэта функцыя непарыўная на D(f) як дзель непарыўных функцый. Абсягам вызначэння з'яўляецца або прамежак $(0,+\infty)$ або аб'яднанне прамежкаў $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Паколькі функцыя $x^{m/n}$ узрастае на інтэрвале $(0+\infty)$, то *f* убывае на гэтым інтэрвале.

У заключэнні вызначым ***ступеневую функцыю $f(x)=x^r$ з адвольным рацыянальным паказнікам ступені r***, як функцыю, якая вызначана на прамежку $(0,+\infty)$ і яе значэнне ў адвольным пункце $a>0$: $f(a)=a^r$ вылічаюцца ў адпаведнасці з азначэннем 1.

Уласцівасці ступені з рацыянальным паказнікам

1. $a^r > 0$ для любых рацыянальных r (вынікае з азначэння 1).

2. Для любых рацыянальных r_1, r_2: $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$, $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}$, $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$,

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$(a\cdot b)^r = a^r \cdot b^r$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{r_1} = \dfrac{a^{r_1}}{a^{r_1}}$.

3.Калі $a > 1$ і рацыянальны лік $r > 0$, то $a^r > 1$.

◄ З узрастальнасці функцыі x^r для $x>0$, $r>0 \Rightarrow a^r > a^0 = 1$. ►

4. Калі $a > 1$, $r_1 > r_2$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$.

◄ $r_1 > r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 > 0 \Rightarrow a^{r_1 - r_2} > 1 \Rightarrow a^{r_1} > a^{r_2}$. ►

5. Для адвольнай паслядоўнасці $\{r_n\}$, якая імкнецца да 0, і $a > 0$, адпаведная паслядоўнасць $\{a^{r_n}\}$ імкнецца да 1.

◄ 1. Дакажам, што для $a > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ (1) і $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ (2)

Паколькі $\frac{1}{n} > 0$, то па ўласцівасці 3° $a^{\frac{1}{n}} > 1$. Абазначым праз $\alpha_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ (3)

$\Rightarrow$ $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$, тады $a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\cdot\alpha_n$ (лема Бернулі)

$\Rightarrow 0 < \alpha_n < \dfrac{a-1}{n}$. Па тэарэме аб ліміце прамежк. пасл-ці $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$(крытэрый збежнасці лікавай паслядоўнасці).

Роўнасць (2) можна даказаць з дапамогай тэарэмы аб ліміце дзелі збежных паслядоўнасцей, паколькі $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1$.

2. Няхай $\{r_n\}$– адвольная паслядоўнасць рацыянальных лікаў, якая імкнецца да 0.

Разгледзім $\forall\varepsilon > 0$, з улікам (1) і (2) $\overset{def}{\Rightarrow} \exists n_1 \in N \mid \forall n > n_1 \Rightarrow \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$. (4)

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Для гэтага ж $\forall\varepsilon>0 \overset{def}{\Rightarrow} \exists n_2\in N \mid \forall n>n_2 \Rightarrow \left|a^{-\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon$. (5) Абазначым праз $n_3=\max\{n_1,n_2\}$. Па ўласцівасці модуля $\forall n>n_3$, з улікам (4) і (5) выконваюцца няроўнасці

$$\left.\begin{array}{l} 1-\varepsilon<a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n}}<1+\varepsilon \end{array}\right\} \overset{\text{па ўл.}3^o}{\Rightarrow} 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n}}<a^{-\frac{1}{n_3}}<a^{\frac{1}{n_3}}<a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$$

$$\Rightarrow 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_3}}<a^{\frac{1}{n_3}}<1+\varepsilon \qquad (6)$$

Паколькі па ўмове $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$, то $\forall\varepsilon>0\left(\varepsilon=\frac{1}{n_3}\right)\exists n_0\in N \mid \forall n>n_0$ адсюль атрымоўваем $|r_n|<\frac{1}{n_3} \Leftrightarrow -\frac{1}{n_3}<r_n<\frac{1}{n_3}$, то па ўласцівасці 3, калі $a>1$

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_3}}<a^{r_n}<a^{\frac{1}{n_3}}<1+\varepsilon \quad \forall n>n_0 \overset{def}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a^{r_n}=1$$

3. Калі $0<a<1$, то $\frac{1}{a}>1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}=1$ (па тэарэме аб ліміце дзелі лікавых паслядоўнасцей і п.2 доказу).
4. Калі $a=1$, то $\{a^{r_n}\}=1,1,\ldots$ імкнецца да 1, як сталая. ▸

§4. Ступень з ірацыянальным паказнікам ступені

Тэарэма. Няхай $a>0$, α – ірацыянальны лік. Для любой паслядоўнасці рацыянальных лікаў $\{r_n\}$, якая імкнецца да α, калі $n\to\infty$, адпаведная паслядоўнасць $\{a^{r_n}\}$ мае адзін і той жа ліміт.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

◀ Няхай $a > 0$, α - адвольны ірацыянальны лік. Разгледзім якую-небудзь узрастаючую паслядоўнасць рацыянальных лікаў $\{r_n\}\to\alpha$, калі $n\to\infty$, прычым $r_n<\alpha$ $\forall n\in N$. Згодна ўласцівасці 4° ступені з рацыянальным паказнікам для $a > 1$, паслядоўнасць $\left\{a^{r_n}\right\}$ узрастаючая і абмежаваная зверху лікам a^{r^*}, дзе r^*– які-небудзь рацыянальны лік, які больш за α. Таму паслядоўнасць $\left\{a^{r_n}\right\}$ мае канечны ліміт і ён супадае з $\sup\left\{a^{r_n}\right\} = A$ (на падставе тэарэмы аб ліміце манатоннай абмежаванай паслядоўнасці).

Разгледзім зараз адвольную паслядоўнасць рацыянальных лікаў $\{\rho_n\}$, якая імкнецца да α, калі $n\to\infty$. Дакажам, што адпаведная паслядоўнасць $\left\{a^{\rho_n}\right\}$ імкнецца да таго ж ліку A. Паколькі $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \alpha$, то

$\lim\limits_{n\to\infty}(\rho_n - r_n) = 0$. Паводле ўласцівасці 5° §3 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n - r_n} = 1$. Разгледзім

паслядоўнасць $a^{\rho_n} = a^{r_n}\cdot a^{\rho_n - r_n}$. Па тэарэме аб ліміце здабытку

$$\lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\cdot a^{\rho_n-r_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(a^{\rho_n-r_n}\right) = A\cdot 1 = A.$$

Для выпадку $0< a <1$, то $\frac{1}{a}>1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho_n}} = A$, дзе

$A = \frac{1}{A^*}$, $A^* = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho_n}$ (паводле тэарэмы аб ліміце дзелі і п.2 доказу).

Калі $a=1$, то $\left\{a^{\rho_n}\right\}=1,1,\ldots$ імкнецца да 1, як сталая. ▶

Азначэнне 1. *Ступенню ліку $a>0$ з ірацыянальным паказнікам α* называецца лік a^α, які азначаецца

$$a^\alpha \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n}, \qquad (1)$$

дзе $\{\rho_n\}$ – адвольная паслядоўнасць рацыянальных лікаў, якая імкнецца да ірацыянальнага ліку α.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Прыклад. $2^{\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\rho_n}$, дзе $\{\rho_n\} \to \sqrt{3}$, калі $n\to\infty$;

$\rho_n = 1 + 7/10 + 3/100 + 2/1000 + c_4/10^4 + \ldots + c_n/10^n$,

$\sqrt{3} = 1{,}732c_4c_5\ldots c_n\ldots$

$\{\rho_n\}$– дзесятковае набліжанне да α з недахопам (недастаткам).

Заўвага 1. Роўнасць (1), якая ў выпадку ірацыянальнасці α з'яўляецца азначэннем ступені з ірацыянальным паказнікам a^{α}, можа быць даказана і ў выпадку рацыянальнага α.

Заўвага 2. З дапамогаю азначэнняў (1) і (2) уводзіцца паняцце ступені з любым сапраўдным паказнікам, якая мае тыя ж самыя ўласцівасці, што і ў азначэнні (1) для ступені з рацыянальным паказнікам.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

§5. Паказнікавая функцыя

Азначэнне 1. *Паказнікавай функцыяй* называецца функцыя, якая зададзена роўнасцю $f(x) = a^x$, $\forall x\in$R, дзе $0 < a,\ a \neq 1$.

Адпаведна азначэнню ступені сімвал a^x трэба разумець так:

1. Калі $x = n \in$N, то $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (множнікі $\boldsymbol{a}$ узятыя n-разоў).
2. Калі $x = 1/n$ ($n \in$N), то $a^{1/n}$ – арыфметычны корань n-ай ступені з ліку a.
3. Калі $x = 0$, то $a^{\text{o}} = 1$.
4. Калі $x = m/n$ ($m, n \in$ N не маюць агульных дзельнікаў няроўных 0), то $(a^m)^{1/n} = a^{m/n}$.
5. Калі $x = – m/n$ ($m, n \in$ N не маюць агульных дзельнікаў няроўных 0), то $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

6. Калі $x = \alpha$ - ірацыянальны лік, то $a^{\alpha} \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n}$, дзе $\{\rho_n\}$ – адвольная паслядоўнасць рацыянальных лікаў, якая імкнецца да ірацыянальнага ліку α.

Уласцівасці паказнікавай функцыі

1. D(f) = R.

2. $a^x > 0\ \forall x \in R \Rightarrow E(f) = (0,+\infty)$.

3. Калі $a > 1$, то $a^x > 1\ \forall x > 0$; калі
$0 < a < 1$, то $a^x < 1$.

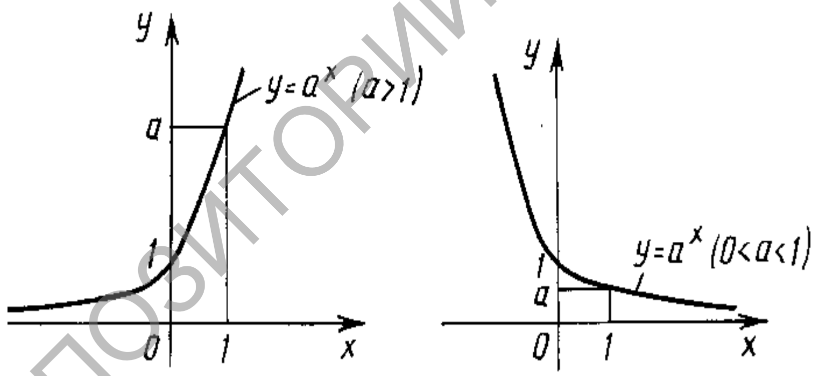
4. Калі $a > 1$, то a^x - узрастаючая функцыя ; калі $0 < a < 1$, то a^x - спадальная функцыя.

5. Функцыя a^x непарыўная на ўсёй лікавай прамой.

6. Калі $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Калі $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$. y=0 – гарызантальная асімптота.

7. Графік паказнікавай функцыі



РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

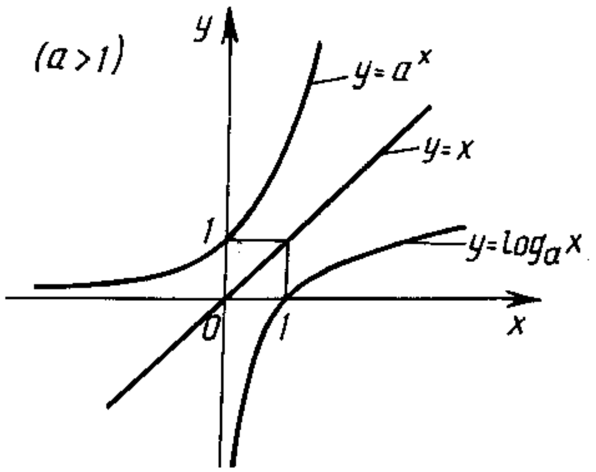
§6. Лагарыфмічная функцыя

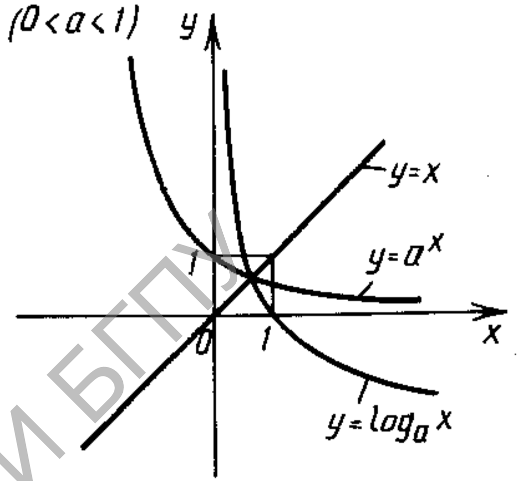
Разгледзім паказнікавую функцыю $f(x) = a^x\ \forall x \in R$, дзе $0 < a \neq 1$.

Калі $a>1$, то функцыя ўзрастаючая, а калі $0 < a < 1$, то ўбываючая. Функцыя непарыўная на мностве R, E(f) = (0,+∞). Па тэарэме аб існаванні і непарыўнасці адваротнай функцыі вынікае, што існуе адваротная функцыя f^{-1}, якая ўзрастаючая (убываючая) на $D(f^{-1}) = E(f) = (0,+\infty)$.

Азначэнне 1. Функцыя f^{-1}, адваротная паказнікавай функцыі, называецца *лагарыфмічнай функцыяй пры аснове a* і абазначаецца $f^{-1} = \log_a$. D(log) = (0,+∞), E(log) = R.

Графікі паказнікавай і лагарыфмічнай функцый сіметрычныя адносна прамой $y = x$.





Азначэнне 2. Значэнне лагарыфмічнай функцыі ў кожным пункце x>0, г.зн. $\log_a x$, называецца *лагарыфмам ліку x па аснове a.*

Вядома, што $f(f^{-1}(x)) = x \ \forall x \in D(f^{-1}) = E(f) = (0,+\infty) \Rightarrow \qquad a^{\log_a^x} = x$ (1)

– лагарыфмічная тоеснасць.

Азначэнне 2*. *Лагарыфмам ліку x>0 па аснове a* называецца паказнік ступені, у якую трэба ўзвесці a, каб атрымаць лік x.

Прыклад. $2^{\log_2 7} = 7$.

Уласцівасці лагарыфмічнай функцыі

Непасрэдна з уласцівасцей функцыі $f(x) = a^x$, з улікам тэарэмы 1 §1 вынікаюць наступныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі:

1. Лагарыфмічная функцыя ўзрастаючая, калі $a > 1$ і ўбываючая, калі $0 < a < 1$.
2. Функцыя непарыўная на сваім абсягу вызначэння, г.зн. на $(0;+\infty)$.
3. $\log_a 1 = 0$ (паколькі $a^0 = 1$).
4. Калі $a > 1$, то $\log_a x < 0$ калі $0 < x < 1$, $\log_a x > 0$ калі $x > 1$.

РЭПАЗІТОРЫЙ БДПУ

5. Калі $a>1$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x=+\infty$, калі $0<a<1$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x=-\infty$. Адсюль вынікае, што графік лагарыфмічнай функцыі мае правую вертыкальную асімптоту $x = 0$.

На падставе лагарыфмічнай тоеснасці (1) можна даказать наступныя ўласцівасці лагарыфма:

$$\log_a(b_1\cdot b_2)=\log_a b_1+\log_a b_2 \quad (\forall b_1,b_2>0) \tag{2}$$

$$\log_a(b_1/b_2)=\log_a b_1-\log_a b_2 \quad (\forall b_1,b_2>0) \tag{3}$$

$$\log_a b^{\alpha}=\alpha\cdot\log_a b \quad (\forall b_1,b_2>0) \tag{4}$$

Дакажам, напрыклад, (2). З тоеснасці (1) $\Rightarrow b_1=a^{\log_a b_1}$, $b_2=a^{\log_a b_2}$. Знойдзем здабытак $b_1\cdot b_2=a^{\log_a b_1}\cdot a^{\log_a b_2}=a^{\log_a b_1+\log_a b_2}$ (па ўласцівасці ступені). Тады па азначэнні лагарыфма ліку 2, мае месца роўнасць $\log_a(b_1\cdot b_2)=\log_a b_1+\log_a b_2$.

Дакажам роўнасць, якая дазваляе пераходзіць у лагарыфмічнай функцыі ад адной асновы да другой. Для гэтага пралагарыфмаем абедзве часткі тоеснасці (1) па аснове b: $\log_b a^{\log_a^x}=\log_b x$. Выкарыстоўваем роўнасць(4) $\log_a x\cdot\log_b a=\log_b x$ і атрымліваем роўнасць для пераходу да лагарыфма па іншай аснове

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Заўвага. Лагарыфм дадатнага ліку *x* па аснове e называецца *натуральным лагарыфмам* і абазначаецца ln *x*, а па аснове 10 – *десятковым лагарыфмам*, абазначаецца lg *x*.

§7. Ступеневая функцыя з ірацыянальным паказнікам

У §4 было ўведзена азначэнне ступені з ірацыянальным паказнікам для кожнага дадатнага *x*.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Разгледзім функцыю $f(x) = x^{\alpha}$ $\forall x \in (0+\infty)$ (1) , дзе α - ірацыянальны лік. Гэту функцыю называюць *ступеневай функцыяй з ірацыянальным паказнікам.*
$D(f) = (0,+\infty)$.

Дакажам, што функцыя x^{α} непарыўная на $D(f)$.

◀ $x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x}$. Формула (1) прыме выгляд $f(x) = e^{\alpha \ln x}$.(1*)

Функцыя (1*) – складаная функцыя: $f(x) = g(u(x))$, дзе $g(x)=e^{x}$, $u(x) = \alpha \ln x$. Паколькі кожная з функцый g і u непарыўная , то і функцыя f непарыўная ў сваім абсягу вызначэння як складаная функцыя.

§8. Клас элементарных функцый

Азначэнне 1.*Асноўнымі элементарнымі функцыямі* называюцца функцыі са значэннямі $f(x) = c$ $(c \in R)$, $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$, $f(x) = a^{x}$ $(0 < a \neq 1)$, $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg} x$, $f(x) = \mathrm{ctg} x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \mathrm{arctg} x$, $f(x) = \mathrm{arcctg} x$.

Азначэнне 2. *Элементарнымі функцыямі* называюцца такія функцыі, якія атрыманы з асноўных элементарных функцый з дапамогаю чатырох арыфметычных дзеянняў і кампазіцый гэтых функцый (складаныя функцыі).

У **§§1-7** мы паказалі, што асноўныя элементарныя функцыі непарыўныя ў сваіх абсягах вызначэння.

На падставе тэарэмы аб непарыўнасці алгебраічнай сумы, здабытку, дзелі непарыўных функцый і тэарэмы аб непарыўнасці складанай функцыі можна зрабіць **выснову**, што ***кожная элементарная функцыя непарыўная ў сваім абсягу вызначэння.***

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

АДКАЗЫ НА ТЭСТ

выніковага кантролю па модулі

1		$f(x) = c$ ($c \in R$), $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in R$), $f(x) = a^{x}$ ($0 < a \neq 1$), $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$
2	а)	$f(x) = c$ ($c \in R$), $f(x) = x^{n}$ ($n \in N$), $f(x) = a^{x}$ ($0 < a \neq 1$), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$
	б)	$f(x) = x^{\pm\frac{1}{2n}}$ ($n \in N$), $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$)
	в)	$f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in Z_-$)
	г)	$f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$
3		$f(x) = c$ ($c \in R$), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$
4		$f(x) = c$ ($c \in R$), $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha = \pm\frac{2n}{m}$, $n, m \in N$), $f(x) = \cos x$
5		$f(x) = 0$, $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha = \pm(2n+1)$, або $\alpha = \pm\frac{1}{2n+1}$, $n \in N$), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$
6		$f(x) = c$ ($c \in R$), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$
7		$f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha = (2n+1)$, або $\alpha = \frac{1}{2n+1}$, $n \in N$), $f(x) = a^{x}$ ($a > 1$), $f(x) = \log_a x$ ($a > 1$), $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$
8		$f(x) = a^{x}$ ($0 < a < 1$), $f(x) = \log_a x$ ($0 < a < 1$), $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \mathrm{arcctg}\, x$
9	а)	не
	б)	да
	в)	не
	г)	не
10		не

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

11		да, $D(y^{-1})=[-1;\ 1]$, $E(y^{-1})=[-\pi;\ 0]$, непарыўная і ўзрастаючая на $D(y^{-1})$; з'яўляецца элементарнай $y^{-1}= -\arccos x$
12		A 7, B 2, C 9, D 17, E 5, F 10, G 6, H 13, I 16, J 3, K 15, L 14, M 4, N 11
13	а)	$f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha\in Z_{-})$, $f(x) = a^{x}$ $(0<a\neq 1)$, $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$, $f(x) = \mathrm{arcctg}\,x$
	б)	$f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha\in Z_{-})$, $f(x) = \log_a x$ $(0<a\neq 1)$, $f(x) = \mathrm{tg}\,x$, $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$
	в)	$f(x) = 0$, $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha = \pm(2n+1)$, або $\alpha = \pm\frac{1}{2n+1}$, $n\in N$), $f(x) = \sin x$, $f(x) = \mathrm{tg}\,x$, $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$
	г)	$f(x) = c$ $(c\in R)$, $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha = \pm\frac{2n}{m}$, $n, m\in N$), $f(x) = \cos x$
14		яны непарыўныя

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ